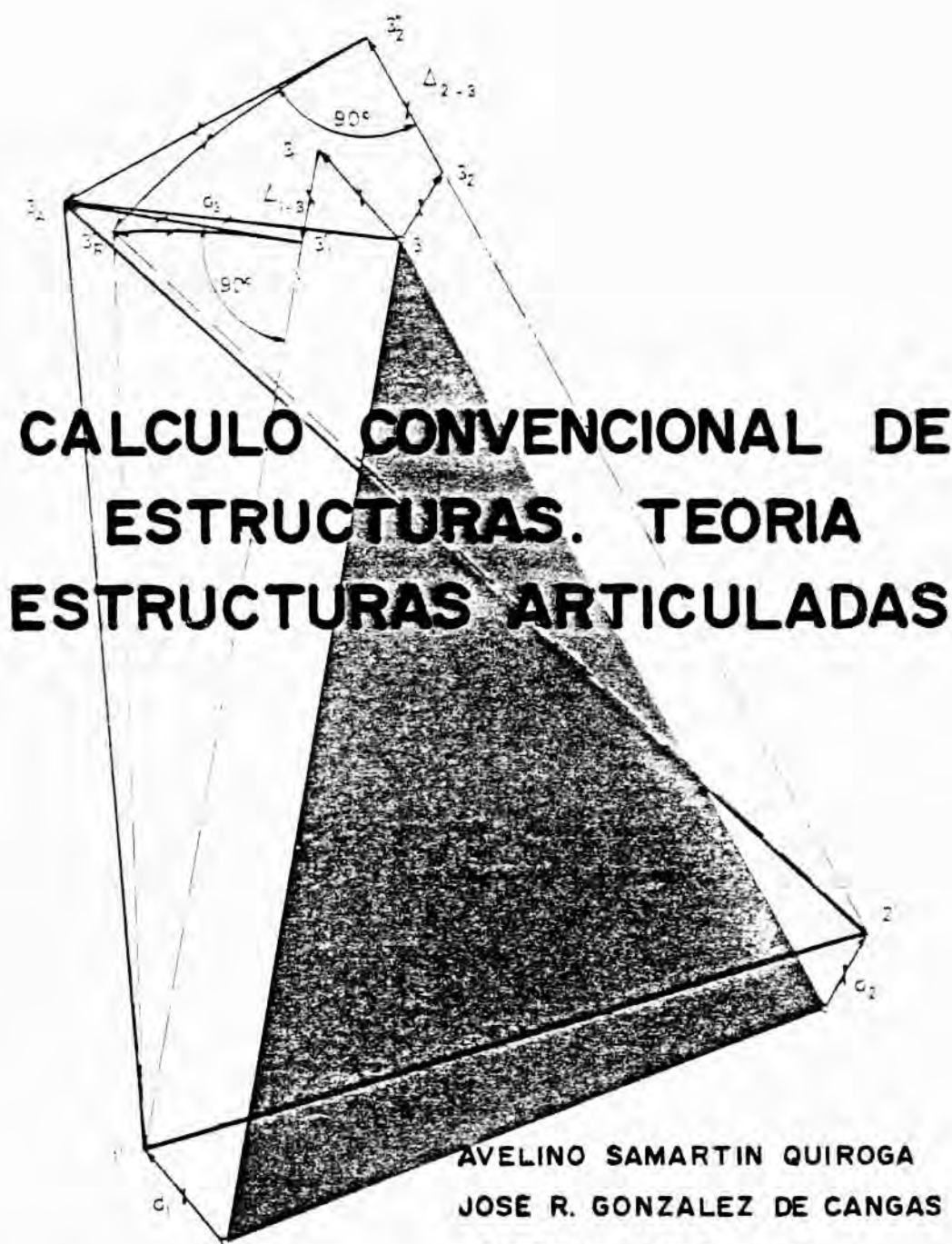


UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

Departamento de Análisis de las Estructuras



**CALCULO CONVENCIONAL DE
ESTRUCTURAS. TEORIA
ESTRUCTURAS ARTICULADAS**

**AVELINO SAMARTIN QUIROGA
JOSE R. GONZALEZ DE CANGAS
JAVIER TORRES RUIZ
LUIS MORENO GARCIA**

1986

PUBLICACION AE.86.1

Presentación

Uno de los objetivos prioritarios que me he planteado al iniciar mis tareas docentes dentro de la Cátedra de Cálculo de Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander ha sido la elaboración de unas notas de clases que recogieran la información dispersa en distintos libros y publicaciones, y facilitar así al alumno su aprendizaje de las asignaturas impartidas.

Inicialmente, se comenzó con la publicación de ejercicios prácticos y problemas, sobre temas que componen el programa de la asignatura **Cálculo de Estructuras I**, y que habían sido propuestos con anterioridad en distintas pruebas y exámenes. Con la descripción detallada de la resolución de estos ejercicios se intentaba aclarar puntos diferentes de la teoría así como allanar dificultades típicas que se encuentran en el cálculo. La ayuda prestada en este esfuerzo docente por los ex-alumnos y ya entonces colaboradores en la Cátedra ha sido valiosísima.

Un paso hacia adelante ha sido la redacción de unas lecciones que resumían las ideas mas importantes expuestas en clase. Esta tarea, supuso un proceso constante de numerosas tentativas, que permitieron al final alcanzar una publicación con un carácter mas definitivo, como la que ahora se presenta. Esta constituye la finalización de una parte de la asignatura, importante desde el punto de vista docente, referente al cálculo convencional de estructuras, y que se inició con el libro Estructuras Reticuladas. Ambas publicaciones se habían previsto inicialmente en un solo libro, pero las urgencias de la enseñanza exigieron, que viera la luz primeramente la segunda parte, relegando la que ahora se presenta, Estructuras Articuladas, a una etapa posterior. Esta demora ha permitido enriquecer las notas iniciales, con la aportación inestimable del Prof. de Cangas, que ha desarrollado en el capítulo primero un resumen histórico del Cálculo de Estructuras, permitiendo situarlo dentro de una perspectiva histórica. Su colaboración, primeramente en unos apuntes preliminares sobre este mismo tema y ahora en la mejor redacción de los primeros capítulos del texto y en re-

solución de numerosos ejemplos y ejercicios propuestos que han elevado, en mi opinión, el interés y eficacia didáctica de esta publicación.

Mención aparte merecen los Profesores Torres y Moreno, que si bien no directamente involucrados en el desarrollo de esta publicación, su labor - primera, ha contribuido en la elaboración de algunas de las primeras - tentativas. Su eficaz colaboración en anteriores publicaciones sobre Problemas de Cálculo de Estructuras, muchos de cuyos resultados han sido - utilizados ahora, legitiman su inclusión en el grupo de autores de este libro. Por otra parte todos ellos esperan que con esta publicación del Departamento, que cierra un importante ciclo de ayuda docente , se alcance una mayor eficacia en la enseñanza de la asignatura Cálculo de Estructuras I.

Santander, Agosto 1986

Avelino Samartín

CAPITULO 1.- CONCEPTOS PREVIOS

1.1 INTRODUCCION

En su obra "Razón y ser de los tipos estructurales", Eduardo Torroja alude al concepto "estructura" en los siguientes términos: "... al decir tipo estructural se hace referencia al conjunto de elementos resistentes, capaz de mantener sus formas y cualidades a lo largo del tiempo, bajo la acción de las cargas y agentes exteriores a que ha de estar sometido, es decir, a la parte de la construcción que garantiza la función estática (antes citada) y que, a falta de otra palabra mejor, se llama estructura".

El concepto de estructura se relaciona, por lo tanto, con características de una obra distintas de su funcionalidad. En efecto, las construcciones pueden ser diseñadas y realizadas con finalidades muy diferentes -un puente permite salvar el cruce de dos tráficos; un edificio de vivienda ha de satisfacer las condiciones de habitabilidad; una presa conservar un volumen de agua con fines específicos de abastecimiento o energéticos, etc.-; sin embargo, existe un condicionante común a todas ellas, previo a su funcionalidad, que puede resumirse bajo el término de "resistencia" (re-existencia); es decir, las construcciones deben de sostenerse y perdurar, al menos un tiempo razonable. En otras palabras, deben de ser estables.

El estudio de las condiciones de estabilidad y resistencia de las construcciones se realiza dentro del ámbito de una ciencia que, de forma genérica, puede denominarse mecánica de las estructuras.

Con objeto de determinar de modo razonable el alcance de esta ciencia, es conveniente revisar sucintamente el proceso implícito en el cálculo de una estructura. Este puede ser dividido en tres fases fundamentales (figura 1.1): Idealización, cálculo propiamente dicho e interpretación.

En la primera fase se traduce la obra del ingeniero en un modelo matemático o estructura que ha de representar las propiedades más relevantes de la construcción. En la siguiente fase -objeto específico del cálculo de estructuras-, y mediante la utilización de los recursos varios procedentes de otras disciplinas, se analiza dicho modelo matemático con objeto de deducir una serie de resultados cuya aplicación a la realidad de la construcción se realiza en la última fase, denominada interpretación.

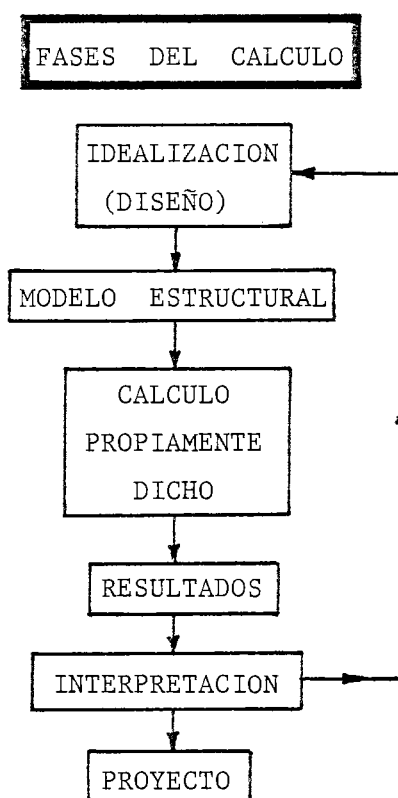


FIGURA 1.1 Fases del cálculo de una estructura.

Se comprende que la idealización estructural y la interpretación de resultados exigen una muy elevada carga de experiencia e intuición; es decir, oficio. Además, conviene tener presente que ambas fases están íntimamente relacionadas. La interpretación y aplicación al proyecto de los resultados de un cálculo estructural dependen, en gran medida, de la idealización o tipo de modelo considerado; contrariamente, éste puede verse influido de modo extraordinario por la clase de resultados o efectos estructurales que se deseen analizar.

Ejemplo 1.1

En el cálculo estructural de un tablero de puente existen diferentes resultados que debe conocer el ingeniero para proceder al dimensionamiento o comprobación del mismo.

A veces se realiza un cálculo denominado longitudinal en el que se supone la estructura compuesta por barras (viga continua, pórtico plano, etc.). De esta forma se conocen los esfuerzos resultantes que actúan en cualquier sección transversal del tablero. Si se deseara conocer la distribución de estos esfuerzos (o tensiones, según los casos) a través de dicha sección, se comprende que el modelo estructural anterior no sería aplicable. Se hace necesario, por lo tan

to, un análisis de reparto de esfuerzos, que se logra mediante otros modelos que consideran el carácter bidimensional del tablero: losa ortótropa, emparrillado plano, lámina plegada, etc. Asimismo, con estos modelos bidimensionales se pueden calcular los valores de los esfuerzos que pueden producirse en el tablero en dirección transversal.

Por último, puede ser de interés conocer los efectos locales en el tablero, es decir, los producidos en la vecindad del lugar de aplicación de cargas concentradas (ruedas de los vehículos, apoyos, etc.). Se comprende que no es posible, con los modelos mono y bidimensionales anteriores, obtener este tipo de esfuerzos. La idealización precisa en este caso corresponde a una estructura tridimensional, que puede ser analizada con el recurso de las técnicas de la Elasticidad.

Se observa, pues, cómo, por una parte, los resultados deducidos de un análisis dependen del modelo elegido y, por otra, cómo dicho modelo está condicionado al tipo de resultados que se persiguen.

El objetivo de esta publicación es el de desarrollar la mencionada fase segunda dentro del proceso de un cálculo estructural y que, en lo sucesivo, se designa con el nombre de cálculo de estructuras.

Si bien existen muchos e importantes problemas que pueden ser incluidos dentro del ámbito del cálculo de estructuras, aquí únicamente serán tratados aquellos que son específicos del análisis, es decir, los correspondientes al estudio de las relaciones entre las excitaciones estructurales (acciones) y las respuestas (resultados). Se dejan, por lo tanto, de lado todos los problemas fundamentales de síntesis o proyecto de sistemas estructurales incluidos dentro del término diseño óptimo de estructuras, así como los relativos a la cada vez más importante rama del cálculo de estructuras denominada teoría de la Identificación.

Si se considera el trinomio excitación-estructura-respuesta, el análisis supone totalmente conocidas las características de los dos primeros términos -excitación y estructura-, siendo su objetivo la determinación de la respuesta estructural.

En la síntesis se intenta definir la estructura, de modo que su comportamiento ante una excitación o conjunto de excitaciones sea óptimo y produzca una respuesta adecuada.

Por último, en la identificación estructural se dispone, como dato, del comportamiento estructural, es decir, la relación excitación-respuesta, y su objetivo es la determinación de las características de la estructura. Un sencillo ejemplo corresponde al ensayo de una probeta en el laboratorio, si bien podrían citarse situaciones más complejas, como es el caso de la experimentación dinámica

de estructuras, en mesa vibrante, para la obtención, entre otros resultados, de las constantes que definen los mecanismos de amortiguamiento.

En resumen, como se ha indicado anteriormente, el objetivo de esta publicación se centrará en el análisis estructural.

1.2 ASPECTOS CIENTIFICOS Y TECNOLOGICOS DEL CALCULO DE ESTRUCTURAS

1.2.1 Conceptos de ciencia y técnica

El Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua incluye la siguiente acepción del vocablo "ciencia": "Cuerpo de doctrina metódicamente formado y ordenado que constituye una rama particular del saber humano".

Resulta evidente, por lo tanto, el carácter científico del cálculo de estructuras cuyos principios rectores son comunes a los de las ciencias madres de las que se nutre: matemáticas, mecánica, ciencia de los materiales, etc. Sin embargo, no se trata de una ciencia pura propiamente dicha, sin ninguna componente de aplicación.

Atendiendo a la definición de N. Brugger sobre la técnica como "el aprovechamiento ordenado de los recursos y fuerzas naturales, fundado en el conocimiento de la Naturaleza y puesto al servicio de la satisfacción de las necesidades del hombre", se infiere que el cálculo de estructuras es también, en parte, una técnica.

1.2.2 Aspectos científicos del cálculo de estructuras

Así pues, por lo que antecede, el cálculo de estructuras goza de ambas cualidades (científicas y técnicas), es decir, constituye un ejemplo de ciencia aplicada, o también ciencia-técnica.

En este contexto, el cálculo de estructuras participa del continuo debate que en la ingeniería existe entre observación y especulación con vistas a la aplicación. Sólo una visión científica puede dar contenido a la técnica; en palabras de Leonardo da Vinci: "Studia prima la scienza e poi seguita la practica, nata da essa scienza". En el caso del análisis de estructuras (¡cuántas veces se olvida!) no tiene sentido, por ejemplo, recurrir a unas medidas de extensometría sin tener un profundo conocimiento del comportamiento estructural y de sus causas. Pero tampoco puede el ingeniero detenerse en la obtención de unos cálculos deducidos de una teoría, puesto que "el análisis es un medio para un fin -no un fin en sí-, ya que el objetivo primario del ingeniero estructural es diseñar, no analizar".

A fin de ilustrar, mediante ejemplos concretos, el contenido científico del cálculo estructural, se describen a continuación algunas áreas del mismo que han podido ser desarrolladas gracias a la aplicación de la ciencia nutricia correspondiente. Concretamente, se hará referencia a las matemáticas, mecánica y ciencia de los materiales.

-Matemáticas

Se distinguen aquí algunas ramas de la matemática que han influido de forma especial en el análisis estructural.

El análisis matricial y, en general, toda el álgebra lineal han generado un cálculo matricial de estructuras propio, correspondiente al desarrollo de mé todos estructurales organizados en su notación, de forma tal que puedan ser fá-
cilmente tratados por un ordenador.

Los cálculos vectorial y tensorial constituyen herramientas imprescindibles en la exposición de la teoría general de láminas, así como en los modernos trata-
mientos de la elasticidad y plasticidad.

El cálculo de estructuras continuas exige unos conocimientos esenciales y completos de cálculo diferencial e integral para el planteamiento de las ecua-
ciones generales.

Los recursos analíticos actuales no permiten resolver gran número de proble-
mas estructurales que normalmente aparecen en la práctica profesional, siendo ineludible recurrir a técnicas numéricas cuyo auge ha sido impresionante tras la aparición del computador. El cálculo numérico se hace, pues, imprescindible para abordar multitud de problemas: Integración numérica, en la determinación de las características de un elemento al utilizar el método de los elementos finitos; obtención de autovalores y autovectores (técnicas de iteración inversa, Jacobi, etc.) en la resolución modal de problemas dinámicos; métodos numéricos (Newton-Raphson, en diferencias, etc.) en la resolución de problemas no lineales, son algunos de los múltiples ejemplos que podrían ser citados.

El análisis funcional ha sido aplicado al cálculo estructural de sistemas continuos desarrollado a principios de siglo (técnicas de Navier o Lévy en teo-
ría de placas, por ejemplo).

Actualmente el planteamiento indirecto variacional del cálculo de estructu-
ras, como forma débil de la ecuación diferencial, ha permitido la utilización de técnicas desarrolladas en 1905 por Ritz y otros, creando nuevos procedimien-
tos numéricos que son objeto de estudio en la Teoría de las variaciones.

La teoría de las transformaciones integrales (transformaciones de Laplace y Fourier) se utiliza, por ejemplo, en la dinámica de estructuras.

A pesar de su frecuente aplicación, la teoría de las probabilidades y la estadística aún tienen un importante campo abierto en numerosas áreas del cálculo estructural: desde la definición de las acciones y características de los materiales hasta la determinación del estado tensional.

-Mecánica

La importancia que esta ciencia tiene en el cálculo de estructuras es tal que éste puede ser considerado como una aplicación de la mecánica de los medios continuos deformables. Los resultados de la mecánica racional, en sus aspectos estático, cinemático y dinámico son utilizados con profusión.

Asimismo, los procedimientos de la mecánica analítica son considerados en todos los planteamientos energéticos del cálculo estructural.

-Ciencia de los materiales

Durante mucho tiempo se ha supuesto, en la deducción de las características constitutivas de los materiales, que éstos eran elásticos y que seguían la ley de Hooke. Actualmente la consideración de modelos no lineales es cada vez más frecuente, si bien la propia definición negativa de "no linealidad" es, en sí misma, una ambigüedad. Se comprende la necesidad de una teoría de los materiales que permita deducir estructuras de los mismos y leyes de comportamiento a nivel macroscópico.

1.2.3. Aspectos tecnológicos del cálculo de estructuras

En lo que respecta a la vertiente tecnológica del cálculo de estructuras, se citan a continuación algunos de los múltiples sectores de la ingeniería civil en los que la aplicación de aquél es ineluctable. Dichos sectores pueden resumirse en tres grandes grupos: Grupo de materiales específicos; grupo de estructuras especiales, y grupo de técnicas integradas o interdisciplinarias.

En el primer grupo se incluyen materias tales como estructuras de hormigón armado, con sus problemas específicos de cálculo no lineal y plasticidad del material; estructuras de hormigón pretensado, con el fenómeno de la fluencia; estructuras metálicas, con los importantísimos problemas de inestabilidad elástica; estructuras mixtas y su no homogeneidad estructural. Incluso la mecánica del suelo debe gran parte de sus métodos de análisis (cimentaciones; presas de tierra, etc.) al cálculo de estructuras. Más lejanas se encuentran la hidráulica y la hidrodinámica, si bien algunos de los procedimientos numéricos que en ellas se utilizan actualmente (método de los elementos finitos, por ejemplo) nacieron para la resolución de problemas estructurales.

Dentro del segundo grupo se pueden citar los puentes, con sus problemas es pecíficos de reparto transversal; las presas, en donde los importantes proble-
mas tridimensionales exigen un tratamiento estructural característico, desde la
asimilación a estructura laminar hasta la aplicación del método de los elemen-
tos finitos; los reactores nucleares, y sus importantes efectos térmicos y diná-
micos; los puertos, con los problemas de impacto en diques y muros de atraque;
.... La lista se haría inacabable.

Por último, y dentro del tercer grupo, se hace referencia a materias inter-
disciplinarias, de las que el ejemplo más característico lo constituye la tipolo-
gía estructural que, por su carácter, supone ser posterior al cálculo, pero cu-
yas implicaciones son anteriores a cualquier resultado. El proyecto, como obje-
tivo primario de la ingeniería, implica una decantación final de las materias ci
tadas y es en él donde el cálculo de estructuras adquiere el carácter básico de
ciencia aplicada.

1.3 DESARROLLO HISTORICO DEL CALCULO DE ESTRUCTURAS

1.3.1 Los precursores

El estado actual de una ciencia debe ser abordado dentro de su contexto históri-
co.

A ese respecto el cálculo de estructuras se halla íntimamente ligado a la
construcción, tan antigua como la propia historia del hombre. Sin embargo, los
constructores de la Antigüedad partían de soluciones empíricas o intuitivas, y
las innovaciones en los procesos y materiales constructivos han sido precisamen-
te las que dieron lugar a esa intuición o experiencia, exigiendo, cada vez en ma-
yor medida, un cálculo o, al menos, una previsión del comportamiento de la cons-
trucción.

La historia del análisis estructural comienza mucho antes de la era Antigua
de los egipcios, griegos y romanos. Aunque de esta época no existen escritos so-
bre los principios del análisis estructural, las ruinas actuales indican que cier
tos fundamentos de la estática del análisis estructural fueron conocidos por sus
constructores. Por ejemplo, Arquímedes (287-212) introdujo el concepto de centro
de gravedad y llevó a su más simple expresión los principios fundamentales de la
estática y el equilibrio.

Todavía en la época actual son motivo de admiración algunas construcciones
que los antiguos han legado a la humanidad. Piénsese en las pirámides egipcias,
mayas o aztecas, por citar un ejemplo.

En la época romana el intento de aprovechar al máximo las características resistentes del material constructivo más comúnmente empleado -la piedra, que permite fundamentalmente compresiones- condujo a la utilización frecuente de un elemento estructural -el arco- del que, por fortuna, en algunos acueductos y puentes, aún perduran en nuestros días extraordinarias muestras que denotan un profundo conocimiento del comportamiento estructural por parte de aquellos constructores.

Otro tanto puede decirse de las construcciones medievales: los puentes en arco, las catedrales románicas y góticas, con sus bóvedas de medio cañón y de crucería, la necesidad de los arbotantes, constituyen ejemplos de obras que en muchas ocasiones aún nos llenan de admiración, además de por su belleza, por la intuición estructural en ellas reflejada.

Es a partir del Renacimiento cuando queda constancia de un abundante número de testimonios escritos sobre la evolución del análisis estructural, evolución que está íntimamente ligada al desarrollo de sus ciencias nutricias, particularmente la geometría o física que en su intento de aplicación al mundo exterior han generado la mecánica.

El desarrollo histórico del cálculo de estructuras después del Renacimiento puede dividirse en las siguientes etapas:

-La era de los grandes maestros

Es la era de-entre otros- Leonardo da Vinci (1452-1519), que introdujo los conceptos de fuerza y momento; Galileo Galilei (1564-1642), con sus estudios acerca de la teoría de la viga en voladizo, que aparecen en su famoso libro "Dos nuevas ciencias"; y Mimar Sinan (1490-1588), de Estambul, constructor de esbeltos minaretes de gran flexibilidad, diseñados para resistir terremotos.

-La era de los grandes matemáticos

En esta época numerosos matemáticos mostraron gran interés por la mecánica de la construcción, lo suficientemente madura ya para recibir tal nombre. Sus estudios se centraron primordialmente en la teoría matemática de la elasticidad, siendo de destacar, entre otras, las siguientes aportaciones: La ley de tensión deformación de Hooke (1635-1703); la ecuación de vibración de barras de Johann Bernouilli (1667-1748); el pandeo de columnas de Euler (1707-1783); las ecuaciones de flexión de placas de Lagrange (1736-1813); etc.

-La era de los grandes ingenieros

Puede ser considerada la edad de oro de la ingeniería estructural. Nombres tales como Navier (1785-1836), Saint Venant (1797-1886), Clapeyron (1799-1864),

Airy (1801-1892), Maxwell (1831-1879), Castigliano (1847-1884), Möhr (1835-1918) Müller-Breslau (1815-1925),..... entre otros muchos, aplicaron con éxito fórmulas matemáticas desarrolladas en la era anterior a la resolución de problemas estructurales. Aunque sus conocimientos en las ciencias matemáticas fueron sobresalientes, pueden considerarse más como ingenieros que como matemáticos, y sus descubrimientos y teoremas han servido de base al desarrollo de la teoría de las estructuras en la era moderna. En ésta, a principios del siglo actual, hombres como G.A. Maney, H. Cross, R.W. Southwell, G. Kani y tantos otros comprendieron que eran necesarios métodos más prácticos para analizar la complejidad de las estructuras, aportando procedimientos tales como los de relajación, distribución de momentos, etc., que fueron muy utilizados en las oficinas de ingeniería, dada su simplicidad y adaptabilidad a los cálculos manuales.

1.3.2 Desarrollo como ciencia moderna

Se procede a continuación a reseñar las aportaciones más significativas que al cálculo de estructuras hicieron los nombres anteriormente citados y otros más, sin que en ningún momento se trate de una descripción exhaustiva sino de un esbozo muestrario. La moderna y al tiempo clásica obra de S. Timoshenko (1951) "History of Strength of Materials" constituye una referencia valiosísima y recomendada dentro de este contexto.

Con el ánimo de conseguir cierta sistematización, se agrupan dichas aportaciones en cuatro apartados específicos: a) Teoremas generales del cálculo de estructuras, en donde se describe la aparición de los conceptos y teoremas (fundamentalmente energéticos) base de aquél. b) Estructuras discretas. Métodos de solución, que hacen referencia a los teoremas y técnicas de análisis de estructuras con un número finito de grados de libertad. c) Estructuras discretas. Técnicas de cálculo, en donde se citan los distintos artificios que han surgido al intentar obtener soluciones a las estructuras reales, particularmente los entramados. d) Estructuras continuas. En este apartado se describen los resultados hallados al aplicar las ciencias físico-matemáticas al cálculo de estructuras continuas y, concretamente, a la teoría de placas.

a) Teoremas generales del Cálculo de estructuras.

El principio de los trabajos virtuales fue formulado por el ya mencionado Johann Bernoulli.

El principio del trabajo mínimo fue establecido por Menabrea (1858), si bien Castigliano, haciendo uso de sus teoremas, fue el que llevó a cabo la demostración.

El concepto de energía potencial y su principio fueron establecidos por G. Kirchhoff (1850).

La analogía estático-cinemática, de tanta trascendencia posteriormente en el estudio de estructuras continuas, fue aplicada por vez primera a estructuras discretas por A. Chebsch (1862).

b) Estructuras discretas. Métodos de solución.

Mediante la utilización del método de las fuerzas B.P.E. Clapeyron (1857) dedujo su célebre ecuación de los tres momentos.

Menabrea (1858) y Castigliano (1879) calcularon estructuras hiperestáticas a través del principio del trabajo mínimo. Este tipo de estructuras, y mediante el método de las fuerzas, fue calculado por Otto Möhr (1864), utilizando el conocido teorema de Maxwell-Möhr.

Los teoremas de reciprocidad fueron demostrados por E. Betti (1872), siendo J.C. Maxwell el que presentó el caso especial de fuerzas unitarias en 1864.

El concepto de líneas de influencia fue introducido en el análisis estructural por O. Möhr (1868) y aplicado independientemente por E. Winkler (1868).

Los conceptos de energía real y complementaria, cuya enjundia no fue totalmente captada hasta tiempos recientes, se deben a F. Engesser (1899). Dichos conceptos permiten generalizar los teoremas primero y segundo de A. Castigliano referentes a estructuras elásticas y lineales (1875).

El método de los movimientos fue planteado por L. Navier (1826), y Clebsch (1862), y mediante el mismo se sentaron las bases para el cálculo de estructuras hiperestáticas. El citado método adquiere su forma más general al ser aplicado a entramados por G.A. Maney (1915), independientemente de los autores anteriores.

Los métodos mixtos deben, quizás, su posterior desarrollo a G. Kron (1944) quien, por vez primera, utilizó matrices de transformación de fuerzas y desplazamientos.

c) Estructuras discretas. Técnicas de cálculo (entramados).

Las técnicas directas de cálculo basadas en métodos gráficos del punto fijo fueron aplicadas al análisis de entramados principalmente por A. Culmann, O. Möhr y W. Ritter, pero eran válidas únicamente para estructuras intraslacionales.

Igualmente válidas tan sólo para este tipo de estructuras lo fueron las técnicas analíticas del punto fijo, entre las que se puede citar la debida a Efsen (1931).

Sin embargo, los métodos que tuvieron una repercusión extraordinaria fueron los basados en técnicas de aproximaciones sucesivas, siendo digno de mención, por derecho propio, el universalmente conocido Método de Cross, desarrollado por Hardy Cross (1932) en su publicación "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments" (A.S.C.E.).

A partir de entonces y hasta la aparición del computador, han sido llevadas a cabo numerosas aportaciones a este respecto, entre las que merecen destacarse las de Kani y el método de los grados de empotramiento de Eduardo Torroja.

Una recopilación y exposición de las diferentes técnicas de aproximaciones sucesivas puede verse en la obra de E. Lightfoot (1961) "Moment Distribution".

Recientemente diversos autores, entre los que cabe citar J.H. Argyris y S. Kelsey (1960), han procedido a una recopilación de los teoremas anteriormente citados y a su aplicación a estructuras relativamente sencillas. Su extensión a situaciones más complejas ha sido llevada a cabo, entre otros, por Reissner y Washizu.

d) Estructuras continuas.

Se describen aquí, de forma somera, las principales aportaciones al estudio del elemento estructural placa.

Los primeros estudios se deben a J. Bernouilli "El Joven" (1796), continuados por Lagrange con su ecuación biarmónica diferencial, presentada al concurso convocado por la Academia de Ciencias de París en 1809 bajo la advocación de Napoleón, concurso cuyo premio fue concedido a S. Germain en 1815.

En 1829 Poisson desarrolló de nuevo la ecuación de Lagrange, estableciendo además cinco condiciones de borde.

Dichas condiciones fueron analizadas en 1850 por Kirchoff quien, mediante principios energéticos de mínimo, dedujo la ecuación de Lagrange y cuatro condiciones de contorno. La validez de la hipótesis de Kirchoff fue confirmada por las soluciones que, sin dicha hipótesis, obtuvieron S. Venant, Mitchell y Love.

En este contexto es conveniente señalar la existencia de dos escuelas claramente diferenciadas: francesa y alemana. Mientras que la primera (Navier, S. Venant, Levy, etc.) perfecciona las técnicas de solución de la ecuación diferencial mediante la utilización de series de Fourier dobles o simples, la segunda acude a técnicas variacionales aplicadas al funcional de la placa.

En época reciente y siguiendo estas técnicas, cabe citar las contribuciones de Dischinger y Zerna, así como las aportaciones de la escuela rusa, particularmente en teoría de láminas, en donde los nombres de Novozhilov, Vlasov o Goldenweizer no deben ser olvidados.

Para finalizar con esta breve reseña histórica conviene mencionar los últimos avances llevados a cabo en el cálculo de estructuras, siendo de cita obligada los nombres de Turner, Topp, Clough y Martin (1956) considerados como los creadores del método de los elementos finitos y pioneros en su aplicación a la resolución de problemas estructurales, método que tanta trascendencia ha tenido posteriormente en los más diversos campos de la ingeniería. Por sus contribuciones en la aplicación de dicho método a los más variados tipos de problemas merece ser destacado el nombre de O.C. Zienkiewicz.

Por último, es preciso hacer referencia a la extraordinaria expansión que la mecánica de estructuras está adquiriendo en los tiempos actuales. El mejor conocimiento del comportamiento de los materiales; los extrarodinarios recursos de cálculo que ofrecen los modernos computadores; el desarrollo de nuevos procedimientos de análisis numérico, etc. han abierto posibilidades aún no suficientemente valoradas en los campos más diversos, de los cuales las modelizaciones de comportamiento no lineal, los problemas de impacto, el estudio de las interacciones estructura-terreno-fluido en los problemas dinámicos o el análisis de problemas acoplados son algunos ejemplos de un muestrario que se haría inacabable.

1.4 SISTEMAS ESTRUCTURALES

Como se ha mencionado anteriormente, el cálculo de estructuras constituye una parte de la Ciencia que, mediante la utilización de conocimientos y métodos pertenecientes fundamentalmente a la matemática aplicada, mecánica racional y ciencia de los materiales, tiene por objetivo el estudio de los modelos matemáticos denominados sistemas estructurales o, más simplemente, estructuras.

Una estructura se puede definir como un sistema mecánico de puntos materiales, procedente de la idealización de una construcción estable. Las estructuras constituyen, pues, una clase de los sistemas de puntos materiales de interés en la mecánica que tratan de modelar el comportamiento resistente de las obras reales. Los enlaces mecánicos entre los distintos puntos materiales de la estructura proceden de las fuerzas de cohesión existentes entre las partículas del material constructivo.

Una primera e importante clasificación de las estructuras procede del número de puntos materiales que se consideren. Así, si éste es finito, la estructura se denomina discreta y continua en caso contrario (Figura 1.2).

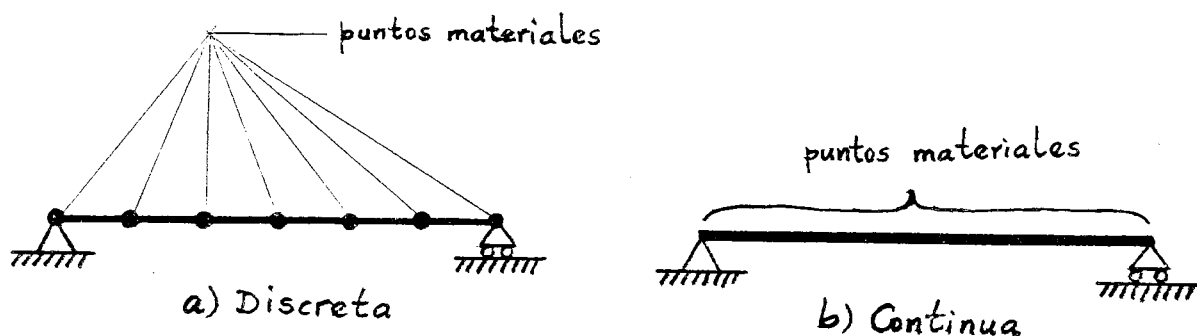


FIGURA 1.2 Estructuras discretas y continuas.

Puesto que las construcciones reales son volúmenes constituidos por un muy elevado número de partículas, se comprende fácilmente que, en general, las estructuras continuas modelan e interpretan más adecuadamente las características resistentes de aquéllas. Sin embargo, las estructuras discretas se utilizan con frecuencia en la Ingeniería al ser, en muchos casos, suficientemente aptas para predecir el comportamiento de la realidad, y su eficiencia, medida en comparación al esfuerzo de computación exigido, es, en ocasiones, muy elevada.

Conceptualmente es posible considerar a las estructuras como ensamblajes de otras más simples denominadas elementos estructurales. Esta división de un sistema estructural en un conjunto de estructuras elementales es de capital importancia en el análisis estructural. Dado que en el estudio de las estructuras se procede, en general, desde el simple elemento a los sistemas más complejos, es de interés describir sucintamente los diferentes elementos estructurales: nudo, barra, cáscara y elemento tridimensional.

El nudo constituye el elemento más simple y corresponde a la imagen del punto material de la mecánica. Generalmente una estructura discreta está compuesta de nudos interconectados por enlaces cuyo efecto depende de las características elásticas del material.

El elemento monodimensional o barra corresponde a una línea de nudos, con dos extremos (denominados en lo sucesivo nudo 1 y nudo 2) que implican un sentido de avance a lo largo de la línea. La barra puede ser recta o curva, según la geometría de la línea de nudos (figura 1.3) y es suficiente un solo parámetro, s , para definir dentro de ella la posición de cada nudo; el 1 corresponde a $s=0$ y el 2 a $s=L$ (longitud de la barra).

El elemento monodimensional constituye una idealización de construcciones con dos dimensiones muy pequeñas respecto a una tercera denominada longitud. Tales construcciones pueden ser sustituidas por una línea, lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones planas normales a la misma, que reci-

be el nombre de directriz. Esta, junto con determinadas cantidades escalares o características mecánicas (áreas, inercias, etc.) definen totalmente a la barra como elemento estructural.

El elemento bidimensional o cáscara puede ser interpretado como una superficie de nudos. Su contorno está constituido por uno o varios elementos monodimensionales, de acuerdo con la conexión de la superficie (Figura 1.4). La definición de un punto (o nudo) de ésta exige la utilización de dos parámetros, s_1 y s_2 , correspondientes a una red de líneas coordenadas de la superficie. Según sea la geometría superficial, y de modo análogo al caso de la barra, las cáscaras pueden ser planas o curvadas.

El elemento bidimensional surge como idealización de un volumen con una dimensión -espesor- muy pequeña respecto a las otras dos. Este volumen puede ser sustituido por una superficie, denominada superficie media, que se define como el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de sus rectas normales limitados por las superficies intradós y trasdós de la cáscara.

Dicha superficie media, conjuntamente con una serie de parámetros escalares (espesores, módulos de elasticidad, etc.) definen totalmente a la cáscara desde el punto de vista estructural.

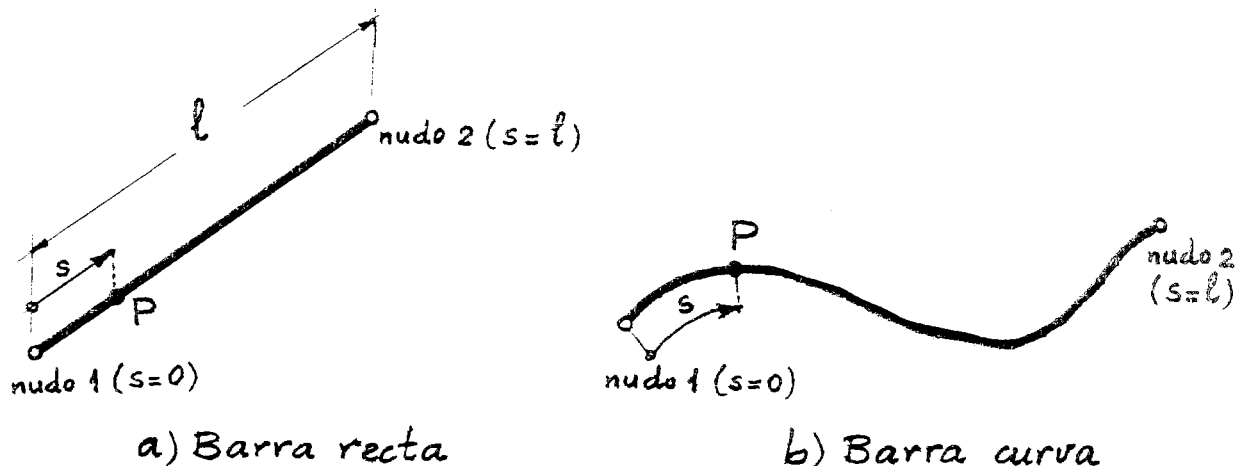


FIGURA 1.3 Elementos monodimensionales.

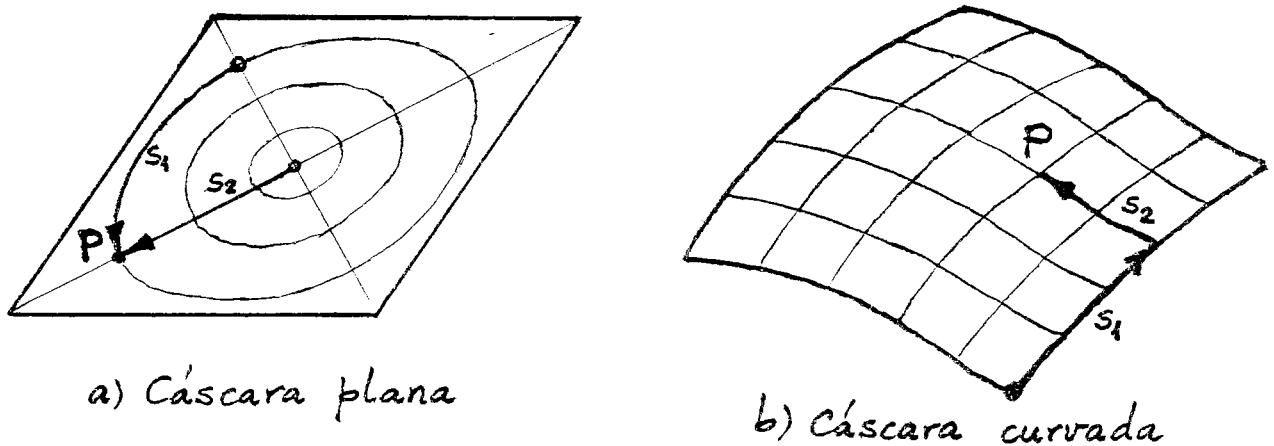


FIGURA 1.4 Elementos bidimensionales.

El elemento tridimensional constituye una estructura con el mínimo de abstracción de la obra resistente, ya que se supone que en ésta no existe ninguna dimensión despreciable respecto a las restantes. El contorno de este elemento estructural lo componen una o varias cáscaras. Su estudio se lleva a cabo dentro de la teoría de la elasticidad espacial, si bien en determinadas situaciones en las que existen simetrías (plana o central), el análisis puede reducirse y ser realizado según las simplificaciones de la elasticidad plana.

Si bien la teoría de la elasticidad constituye, por su metodología y concepción general, una línea básica con entidad propia y cuyo conocimiento, en principio, es previo al cálculo de estructuras, es evidente que ambas disciplinas están íntimamente relacionadas. En definitiva, esta última intenta, especialmente, proporcionar una respuesta o solución a los problemas de la elasticidad, haciendo uso de las hipótesis simplificadoras que aparecen al considerar los sistemas estructurales compuestos de elementos mono y bidimensionales.

1.5 GRADOS DE LIBERTAD DE UNA ESTRUCTURA. COORDENADAS

El estado o configuración de una estructura se puede describir mediante un conjunto de magnitudes físicas localizadas en sus nudos. El número y clase de estas magnitudes dependen esencialmente del tipo de problema que se trata de resolver y, en definitiva, de la idealización estructural llevada a cabo.

No obstante, estas magnitudes se pueden clasificar en dos grupos fundamentales: estáticas y cinemáticas. Dentro de las primeras se incluye el conjunto de fuerzas y momentos que se supone son susceptibles de actuar sobre la estructura. Igualmente, como se verá más adelante, las tensiones y los esfuerzos son magnitudes estáticas. Por contra, las magnitudes cinemáticas comprenden los desplazamientos que ha experimentado una estructura así como las deformaciones correspondientes. Las consideraciones que siguen se centran exclusivamente en las fuerzas y desplazamientos.

Dado el carácter vectorial de las magnitudes anteriores, es posible su definición mediante la introducción de una base o sistema de coordenadas en cada nudo o punto material. Al existir en cada nudo n de la estructura un sistema de coordenadas o base, \underline{e}_n , se define el sistema de coordenadas \underline{e} de la estructura como la reunión de todas las bases \underline{e}_n . Es conveniente ordenar dichas coordenadas, es decir, $\underline{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)$, y de esta forma, una vez introducido dicho sistema, el conjunto de magnitudes que describen un estado estructural queda definido totalmente por un conjunto semejantemente ordenado de escalares o medidas, cada uno de los cuales se refiere a la unidad o identificación del correspondiente vector de la base.

Por ejemplo, el conjunto de fuerzas \underline{P} actuantes sobre una estructura se puede definir mediante la serie ordenada:

$$\underline{P} = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots)$$

en donde el número (escalar) p_i representa la intensidad de la fuerza o momento actuando según la coordenada e_i .

\underline{P} constituye un vector, denominado vector fuerza, de dimensión $N \times 1$, siendo N el número de términos o elementos p_i (finito o infinito).

De modo análogo se puede describir la estructura deformada mediante el vector desplazamiento \underline{D} , definido como sigue:

$$\underline{D} = (d_1, d_2, \dots, d_i, \dots)$$

siendo el escalar d_i la intensidad del desplazamiento o giro correspondiente a la coordenada e_i^* .

En general, en el cálculo de estructuras existe una dualidad entre los espacios \underline{P} y \underline{D} , que implica que las dimensiones de las bases \underline{e} y \underline{e}^* sean idénticas.

Desde un punto de vista computacional es útil, aunque no necesaria, la utilización de un sistema de coordenadas único, \underline{e}^{**} , idéntico formalmente a los utilizados en la definición de \underline{P} y \underline{D} , es decir:

$$e_i^{**} = e_i = e_i^* \quad (\text{para todo } i)$$

si bien, en cada caso, la significación física de la coordenada e_i será bien una fuerza (o momento), bien un desplazamiento (o giro). De este modo, se obtiene el trabajo realizado por la magnitud estática p_i , cuando la estructura sufre un desplazamiento o giro d_i , simplemente como el producto $p_i \cdot d_i$; de forma más general: El trabajo realizado por las fuerzas \underline{P} actuantes en la estructura cuando ésta experimenta unos desplazamientos \underline{D} es igual al producto matricial:

$$\underline{P}^T \cdot \underline{D} = \underline{D}^T \cdot \underline{P} = W \quad (\text{escalar}) \quad (*)$$

La dimensión del sistema de coordenadas común, \underline{e}^{**} , se denomina "número de grados de libertad" de la estructura. De modo análogo la base que induce en cada nudo, \underline{e}_n^{**} , tiene una dimensión que se denomina "número de grados de libertad" del nudo n .

NOTA(*): En lo que sigue se utilizarán los términos "fuerza" y "movimiento" en sentido general, para indicar, respectivamente, fuerza o momento y desplazamiento o giro. Incluso grupos de "fuerzas" o "movimientos" pueden ser incluidos dentro de estos términos.

Resumiendo los conceptos anteriormente expuestos, se puede establecer la siguiente definición:

"Una estructura constituye un sistema de puntos materiales que se deforma, es decir, que varían sus distancias relativas bajo las acciones a que se encuentra sometido. La posición deformada puede referirse a un sistema de coordenadas localizadas en cada punto material. Este sistema local de coordenadas se denomina "grados de libertad" (gdl) del punto o nudo considerado y permite definir tanto los movimientos como las fuerzas que actúan sobre la estructura".

El número de puntos materiales de una estructura es infinito, si bien, puede reducirse -y de hecho se reduce- a un número finito mediante la consideración de nudos "maestros" y nudos "esclavos", en cuyo caso los movimientos en los gdl de estos últimos se deducen una vez definidos los valores en los gdl de los primeros; o bien dicho en términos de fuerzas: Es posible definir unas fuerzas en los grados de libertad maestros, equivalentes (que producen idénticos efectos sobre la estructura) a un conjunto arbitrario de fuerzas en los gdl esclavos. (*)

Ejemplo 1.2

Sea la barra recta a extensión representada en la figura 1.5-a.

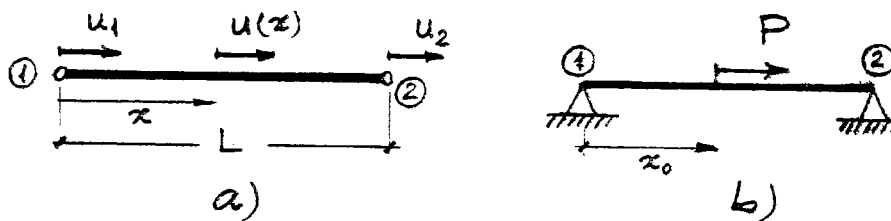


FIGURA 1.5 Grados de libertad. Barra recta a extensión.

a) En términos de movimientos.

Se adoptan como nudos maestros los extremos 1 y 2, en los que se conocen los desplazamientos u_1 y u_2 . El desplazamiento de un nudo esclavo arbitrario, definido por su coordenada x es, simplemente:

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_2 \frac{x}{L}$$

b) En términos de fuerzas.

Se supone ahora (figura 1.5-b) que en x actúa una fuerza P y se pretende hallar las fuerzas equivalentes a la misma en los nudos maestros 1 y 2, es de-

NOTA(*): Los gdl esclavos pueden expresarse como combinación lineal de un conjunto o base de gdl maestros.

cir, aquellas fuerzas que produzcan idénticos efectos en una hipotética estructura de la que forme parte la barra 1 - 2 . El cálculo conduce a los valores:

$$p_1 = P(1 - \frac{x}{L}) \quad ; \quad p_2 = P \frac{x}{L}$$

que representan las fuerzas en los gdl maestros, equivalentes a la acción arbitraria P en el gdl esclavo definido por la coordenada x .

Ejemplo 1.3

Como segundo ejemplo ilustrativo de lo anteriormente expuesto, se considera el caso de una viga a flexión, simplemente apoyada en sus extremos (figura 1.6-a), y sometida a unas acciones exteriores arbitrarias.

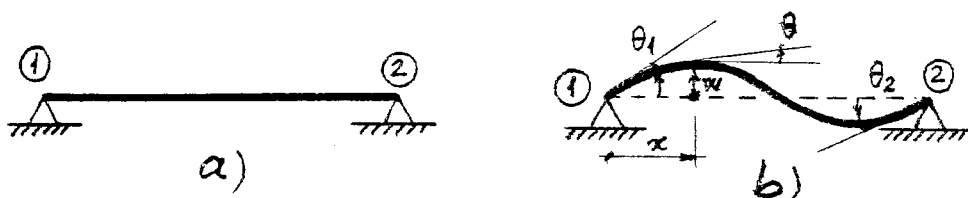


FIGURA 1.6 Grados de libertad. Viga a flexión.

Es evidente que el número de puntos materiales de la viga es infinito y, por lo tanto, también lo es su número de grados de libertad.

Sin embargo, en términos de movimientos, es posible definir totalmente la posición deformada de la viga una vez conocidos los giros θ_1 y θ_2 en sus extremos, según es sabido por la resistencia de materiales. Así pues, dichos extremos actúan como nudos maestros, siendo esclavos los restantes puntos materiales o nudos de la viga.

Así, en el caso de sección constante, los movimientos de un nudo de la directriz situado a la distancia x del apoyo 1 son:

-Desplazamiento horizontal: $u(x) = 0$.

-Desplazamiento vertical : $w(x) = x(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2})\theta_1 + x(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L})\theta_2$

-Giro: $\theta(x) = (1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2})\theta_1 + (\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L})\theta_2$

siendo L la longitud de la viga.

Ejemplo 1.4

Sea la estructura plana representada en la figura 1.7-a, compuesta por cinco barras (a,b,c,d,e) que concurren en cuatro nudos maestros (A,B,C,D). Con objeto de definir los gdl que se consideren, se utilizarán segmentos rectilíneos o circulares orientados, según representen fuerzas (desplazamientos) o momentos (giros). Para estos últimos también se recurre al doble vector.

Evidentemente un mismo sistema estructural puede ser estudiado considerando tipos distintos de cálculos estructurales para una única estructura discreta. Así, en la correspondiente a este ejemplo, se tienen las siguientes situaciones: Estructura articulada plana (figura 1.7-b); estructura entramado plano (figura 1.7-c); emparrillado plano (figura 1.7-d); estructura articulada espacial (figura 1.7-e); emparrillado espacial (figura 1.7-f).

1.6 MAGNITUDES ESTRUCTURALES

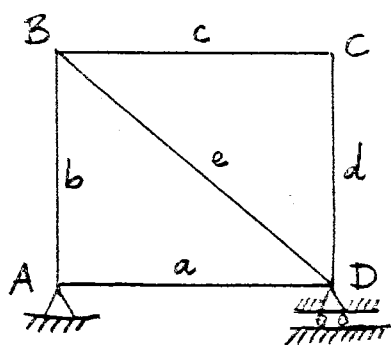
En el cálculo de estructuras se manejan, como ya se ha indicado, dos conjuntos de magnitudes claramente diferenciadas: 1) Magnitudes de tipo estático, tales como fuerzas, esfuerzos y tensiones. 2) Magnitudes de tipo cinemático, es decir, movimientos y deformaciones. A continuación se comentan algunas características de estas magnitudes, referidas, por conveniencia de exposición, a la estructura tridimensional o sólido.

Se define una fuerza o acción como la causa de un movimiento en un sólido (deformable o no). Las fuerzas pueden ser debidas a diferentes causas: térmicas, inerciales, etc.

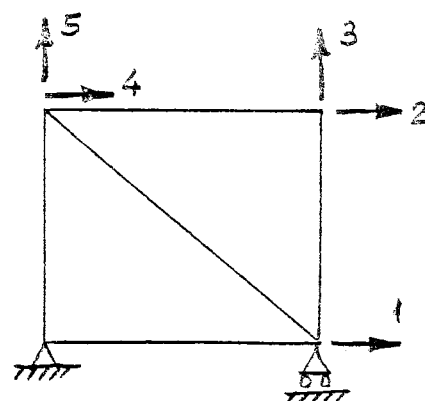
El concepto de tensión surge al aislar un volumen elemental del sólido e imponer su equilibrio. Puede definirse como la fuerza por unidad de área; es decir, al multiplicar la tensión por el área de la cara del sólido elemental se obtiene la fuerza que interviene en las ecuaciones de equilibrio. Si el sólido es continuo, la tensión se define matemáticamente como el límite del cociente entre la fuerza actuante sobre el área alrededor de un punto y el valor de dicha área, cuando ésta tiende a cero. En este límite la tensión sólo depende de la dirección del área infinitesimal considerada; es decir, constituye un tensor, llamado "tensor de tensiones" en el punto.

Las tensiones surgen, por lo tanto, mediante el siguiente proceso ideal:

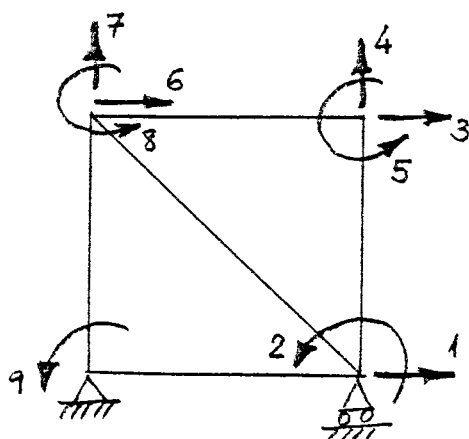
a) Sección de un sólido y consideración de una parte del mismo; b) Fuerza que restablece el equilibrio en el trozo de sólido que se considera, y c) Su intensidad unitaria, cuando este proceso se plantea en un volumen infinitesimal de dicho sólido.



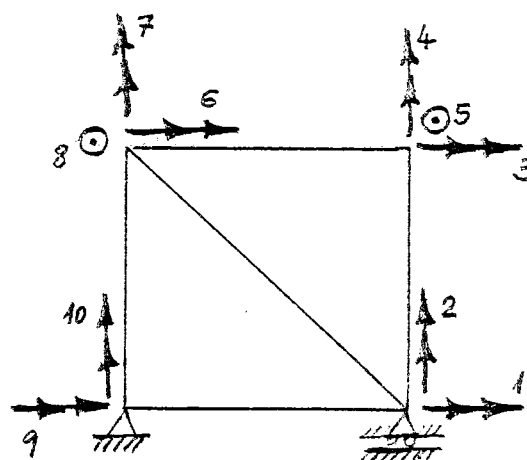
a) Tipología estructural



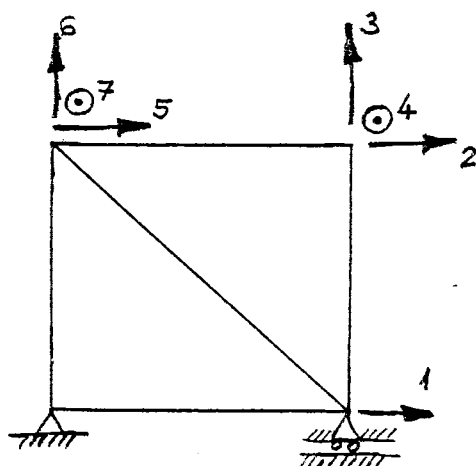
b) Celosía plana



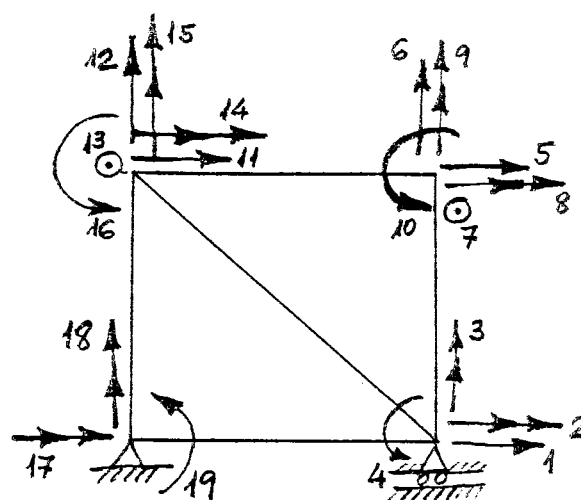
c) Entramado plano



d) Emparrillado plano



e) Celosía espacial



f) Emparrillado espacial

FIG. 1.7 - Tipos de estructuras según sus gdl

Además de su carácter de fuerza unitaria (o por unidad de superficie), la tensión tiene otra característica digna de ser señalada, que es la de constituir una fuerza interna; por lo tanto, supuesto aislado un volumen de un sólido determinado, mediante una sección arbitraria, sobre ambas caras de la sección (en ambas partes del sólido) actúan fuerzas iguales y contrarias, en virtud del principio de acción y reacción de la mecánica.

En resumen, una tensión es una fuerza unitaria, interna y de carácter tensorial.

Frecuentemente, y dentro del contexto del cálculo de estructuras, las tensiones se integran a través de un área, en los elementos monodimensionales, o de un espesor en los bidimensionales, produciendo unas resultantes denominadas esfuerzos, cuyo papel en el cálculo estructural es análogo al desempeñado por las tensiones en la teoría de la elasticidad, si bien el carácter unitario de éstas desaparece al considerar los esfuerzos en elementos monodimensionales, que corresponden a simples fuerzas o momentos actuando en una sección determinada. Por el contrario, en los elementos bidimensionales los esfuerzos se definen por unidad de longitud.

Las fuerzas se relacionan con las tensiones o esfuerzos, según los casos, mediante un determinado tipo de relaciones denominadas ecuaciones de equilibrio.

Conviene tener en cuenta que las fuerzas que actúan sobre un sólido siempre están en equilibrio: estático o dinámico (si se incluyen las fuerzas de inercia).

Como se ha indicado anteriormente, las tensiones que actúan sobre una cara del plano elemental originado por una sección arbitraria de un volumen infinitesimal del sólido se equilibran, en virtud del principio de acción y reacción, con las tensiones que aparecen sobre la otra cara de dicho plano. Es decir, las tensiones (y análogamente los esfuerzos) corresponden a conjuntos de pares de fuerzas unitarias actuando en cada punto de la estructura.

Los movimientos son el resultado visible de la actuación de las fuerzas sobre un sólido. Constituyen una realidad física, medible, contrariamente a lo que sucede con los esfuerzos o tensiones, que son idealizaciones conceptuales, pero de gran utilidad en los planteamientos teóricos del cálculo de estructuras.

Existen dos tipos de movimientos: a) De sólido rígido, caracterizados por constituir un campo vectorial de momentos, y b) Relativos, de determinados puntos del sólido respecto a otros.

Estos últimos originan las deformaciones, que representan en cada punto el movimiento diferencial relativo en un segmento diferencial que contiene a dicho punto. Se comprende que al depender de la dirección de dicho segmento la deformación tiene un carácter tensorial, pudiendo describirse el estado de deformación de un punto mediante el tensor deformación.

De modo análogo a los esfuerzos -definidos mediante una integración de las tensiones en una sección, o equilibrio de éstas con una determinada resultante que representaba el esfuerzo -, es posible asimismo definir, en el cálculo de estructuras mono y bidimensionales, una deformación representativa de la sección, a partir de la cual, mediante meras relaciones de compatibilidad, se puede hallar el estado de deformación en cualquier punto de aquélla. Un ejemplo típico lo constituye la hipótesis de Bernouilli o de las secciones planas en una viga, en donde el conocimiento de la deformación (extensión y curvatura) de la fibra neutra permite calcular la deformación de todas las secciones de la viga.

1.7 RELACIONES DEL CALCULO DE ESTRUCTURAS

Entre las diferentes magnitudes del cálculo estructural que se acaban de mencionar (fuerzas o esfuerzos, tensiones, deformaciones y movimientos) existe una serie de relaciones -que se resumen en la tabla 1.1-, necesarias para resolver el problema del análisis de una estructura y que se comentan a continuación.

Las relaciones o ecuaciones de equilibrio se establecen en general entre fuerzas y tensiones, aisladamente o entre sí, y tienen un carácter estático.

Las relaciones entre movimientos totales -suma de los relativos más los de sólido rígido- y deformaciones constituyen ecuaciones de tipo geométrico, o más adecuadamente, cinemático, y se denominan de compatibilidad.

MAGNITUDES	RELACIONES	TIPO DE RELACION
Fuerzas	Equilibrio	Estática
Tensiones		
Deformaciones	Constitutivas	Experimental mixta
Movimientos	Compatibilidad	Cinemática

TABLA 1.1 Relaciones estructurales.

Por último, las relaciones que determinan el comportamiento específico del material constitutivo del sólido, es decir, las relaciones tensiones-deformaciones, son de carácter experimental. En el estado científico actual sólo pueden ser obtenidas mediante ensayos. Son de tipo mixto, ya que contienen magnitudes cinemáticas y estáticas conjuntamente.

Ejemplo 1.5

Sea la viga esbelta recta que se representa en la figura 1.8.

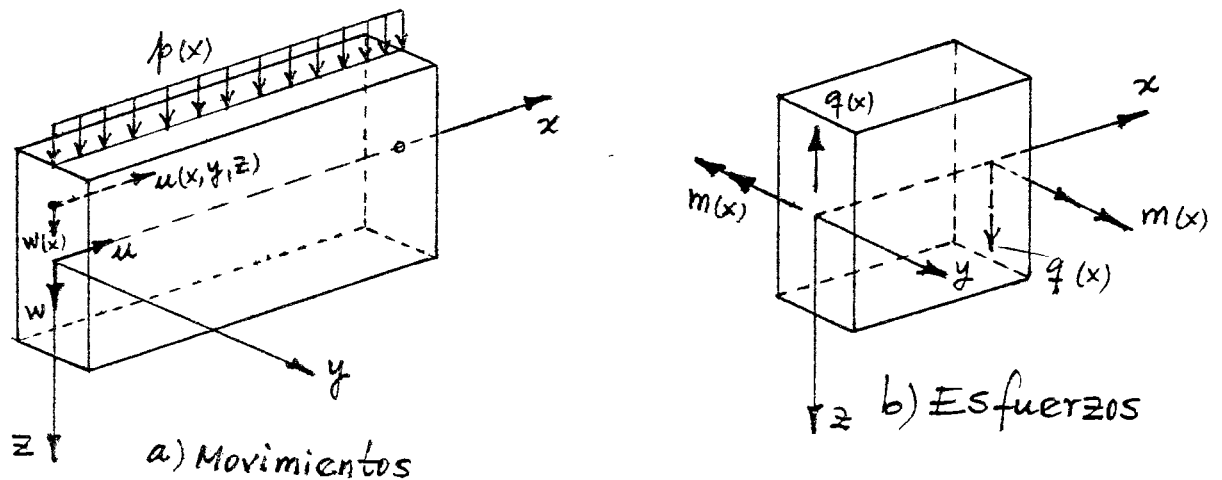


FIGURA 1.8 Viga esbelta recta.

Se considera el eje x en la dirección de la directriz. Los ejes y, z , según los ejes principales de la sección transversal, siendo su dirección constante a lo largo de la directriz. El origen de coordenadas cartesianas coincide con el centro de gravedad de la sección transversal.

Las magnitudes estáticas son: Una acción $p(x)$ por unidad de longitud; el momento flector, $m(x)$, y el esfuerzo cortante, $q(x)$.

Las cinemáticas corresponden a los movimientos $w(x)$ y $u(x,y,z)$ según las direcciones transversal y longitudinal de la viga.

Se suelen introducir en las vigas las dos hipótesis usuales siguientes:

$$\text{-Viga esbelta: } u(x,y,z) = u(x,z) \quad (\text{no existe alabeo}) \quad (1.1)$$

$$\text{-Navier-Bernouilli: } u(x,z) = -z \frac{dw(x)}{dx} \quad (1.2)$$

Ambas hipótesis constituyen ejemplos de condiciones de compatibilidad. Otra ecuación de este tipo aparece en la definición de la deformación, $\varepsilon(x,z)$:

$$\varepsilon(x,z) = \frac{du(x,z)}{dz} \quad (1.3)$$

Ejemplos de relaciones de equilibrio son:

$$\frac{dm(x)}{dx} + q(x) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{dq(x)}{dx} + p(x) = 0 \quad (1.5)$$

y también la definición del esfuerzo $m(x)$:

$$m(x) = \int_{\Omega} z \sigma(x, y, z) d\Omega \quad (1.6)$$

siendo Ω el área de la sección definida por la abscisa x .

Como ejemplos de ecuaciones constitutivas pueden citarse la ley de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (1.7)$$

o bien la ecuación característica de la viga, deducida a partir de las anteriores:

$$m(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.8)$$

siendo I la inercia de la sección de abscisa x .

1.8 CLASIFICACION DE LAS RELACIONES ESTRUCTURALES

Atendiendo a los diferentes tipos de relaciones que se consideren existen varias posibles clasificaciones de los sistemas estructurales. Hasta fecha relativamente reciente, algunas de dichas clasificaciones eran bastante artificiales y nacían, frecuentemente, del propio método manual de cálculo que se utilizaba. En la actualidad, al conseguirse la separación entre el cálculo numérico y el análisis estructural, merced a la aparición de los computadores, han surgido clasificaciones más naturales y profundas, que radican fundamentalmente en diferencias esenciales que existen en los operadores matemáticos que describen el comportamiento de las distintas estructuras. A continuación se indican algunas de estas últimas.

a) Estructuras lineales y no lineales.

Se dice que una estructura es lineal cuando son lineales los tres tipos fundamentales de ecuaciones: equilibrio, compatibilidad y constitutivas. Deben, por lo tanto, satisfacerse de forma simultánea las tres siguientes condiciones:

Primera condición: estática. Supone que en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio, que evidentemente debe realizarse con la geometría de la es-

estructura deformada, ésta coincide con la geometría anterior a la deformación (movimientos pequeños).

Segunda condición: cinemática. Admite una relación lineal entre los movimientos y las deformaciones o, lo que es equivalente, en las ecuaciones de compatibilidad se supone $|u_1| |u_2| \ll 1$, siendo u_1 un movimiento o su derivada (deformaciones pequeñas). Un conocido ejemplo corresponde a la definición de curvatura en los problemas de flexión de vigas, en donde se admite la igualdad:

$$k = y''$$

en lugar de la definición matemática de curvatura:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Tercera condición: constitutiva. Implica que el material es elástico y lineal, es decir, que se rige por la ley de Hooke.

Las estructuras no lineales adquieren dicho carácter por no cumplir alguna (o todas) de las tres condiciones anteriores. Así, se dice que una estructura es estática o geoméricamente no lineal, de material no lineal, etc., según los casos.

El hecho de que una estructura sea lineal supone que es aplicable el principio de superposición, es decir, que si \underline{E}_1 y \underline{E}_2 son dos grupos de acciones diferentes a que se encuentra sometida la estructura, que originan en la misma las respuestas \underline{R}_1 y \underline{R}_2 , respectivamente, entonces la acción combinación lineal $\lambda_1 \underline{E}_1 + \lambda_2 \underline{E}_2$ produce la respuesta $\lambda_1 \underline{R}_1 + \lambda_2 \underline{R}_2$, siendo λ_1 y λ_2 dos constantes de proporcionalidad arbitrarias.

Ejemplo 1.6

Se considera la viga-columna cuyo esquema se representa en la figura 1.9.

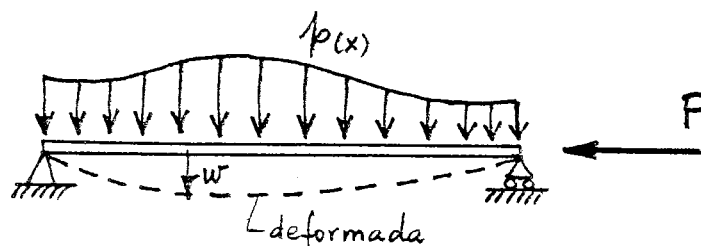


FIGURA 1.9 Viga-columna.

Se trata de una viga trabajando simultáneamente a flexión y compresión, y constituye una estructura no lineal si se considera la teoría de la viga-columna, en cuyo caso no es lineal la relación estática.

En efecto, la condición característica de la viga-columna es:

$$m(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} + P w(x)$$

que se plantea en la geometría deformada de la viga.

Ejemplo 1.7: Pandeo con grandes deformaciones.

Es otro caso que no cumple las condiciones primera y segunda anteriores, dado que se considera:

$$-\frac{m(x) + P w(x)}{EI} = \frac{w'''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \quad (\neq w'')$$

Ejemplo 1.8

Por último, si se desea estudiar una columna a pandeo, con grandes deformaciones y supuesta constituida por un material no elástico (hormigón, por ejemplo), ninguna de las relaciones de linealidad se cumple.

b) Estructuras estáticas y dinámicas.

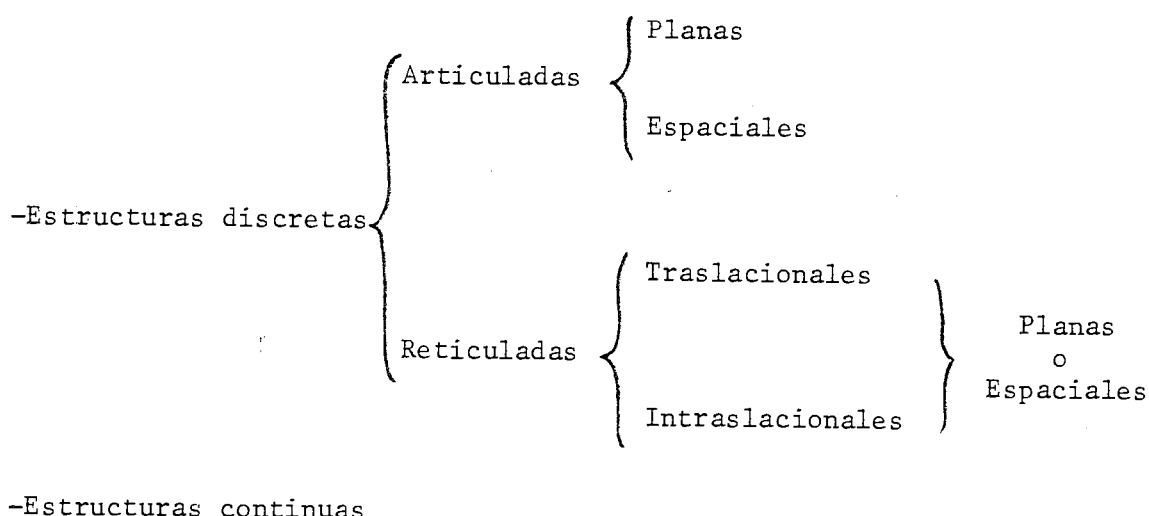
Si las acciones sobre una estructura actúan con suficiente lentitud, en relación con un tiempo característico de la estructura denominado periodo propio, es posible despreciar los efectos producidos por las fuerzas de inercia, en cuyo caso la estructura se denomina estática, y dinámica en caso contrario.

c) Estructuras viscosas y no viscosas.

Se denominan viscosas (o de comportamiento viscoso) aquellas estructuras cuya respuesta en un instante determinado es función de toda la historia de las acciones actuantes, es decir, es una función operador no local y sí integral de la vida de la estructura. En general se trata de estructuras cuyos materiales constitutivos presentan memoria.

Durante mucho tiempo las estructuras consideradas fueron estáticas y no viscosas, lo que dio lugar a la aparición de métodos de cálculo específicos y convencionales. Este hecho supuso una división no natural de estas estructuras, en donde se atendía primordialmente a las características de los métodos de cálculo

manual utilizados en la práctica. Esta división histórica se esquematiza a continuación:



1.9 MÉTODOS FUNDAMENTALES DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

El planteamiento general del cálculo de una estructura consiste simplemente en la resolución del conjunto de los tres grupos de ecuaciones ya comentadas: equilibrio, compatibilidad y constitutivas. Los procedimientos de resolución que se utilizan dependen del tipo de incógnitas básicas adoptadas, según lo cual se pueden distinguir los siguientes métodos fundamentales de cálculo de estructuras:

a) Método de los movimientos.

Se adoptan como incógnitas básicas los movimientos correspondientes a los grados de libertad maestros considerados en la estructura. Estos movimientos deben satisfacer las condiciones de compatibilidad, y en particular, las condiciones de contorno.

Mediante las condiciones constitutivas, se pueden expresar las magnitudes estáticas en función de estos movimientos básicos desconocidos.

Finalmente, en las ecuaciones de equilibrio, que relacionan entre sí a las diferentes magnitudes estáticas, se sustituyen éstas en función de los movimientos anteriores, llegándose a un sistema final de ecuaciones de equilibrio en el que las incógnitas son los movimientos básicos considerados. Por este motivo, este método también recibe el nombre de método de equilibrio. Asimismo, y dado que los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior son los términos de la matriz de rigidez de la estructura, se le conoce igualmente con el nombre de método de rigidez.

b) Método de las fuerzas.

Aquí las incógnitas básicas son un conjunto de fuerzas (hiperestáticas) en equilibrio con las acciones exteriores, es decir, que satisfacen previamente las ecuaciones estáticas.

Las condiciones constitutivas permiten obtener las magnitudes cinemáticas en función de estas incógnitas básicas hiperestáticas.

Por último, las ecuaciones de compatibilidad, que relacionan únicamente in cónitas cinemáticas, pueden ser transformadas, de modo que éstas se eliminan a través de las condiciones constitutivas anteriores, resultando un sistema final de ecuaciones cuyas incógnitas son las hiperestáticas mencionadas. Por esta razón, este método se llama también de compatibilidad. Del mismo modo, puesto que los coeficientes del sistema final de ecuaciones son los términos de la matriz de flexibilidad de la estructura, recibe igualmente el nombre de método de flexibilidad.

c) Métodos mixtos.

En éstos se adoptan como incógnitas básicas movimientos y fuerzas, con lo que se incrementa el número de incógnitas. Su ventaja fundamental reside en la posible simplificación del planteamiento. Un conocido método perteneciente a este tipo mixto es el de la matriz de transferencia o progresión matricial.

d) Métodos híbridos.

Son procedimientos de difícil generalización y corresponden a la adopción, como incógnitas básicas, de movimientos en una parte de la estructura y de fuer zas, en la otra.

De todos los métodos que se han citado anteriormente el más utilizado en la práctica, particularmente en conjunción con el soporte de cálculo mediante computador, es el método de los movimientos, en el cual se basan la mayoría de los programas generales existentes de cálculo de estructuras.

Las razones fundamentales para esta elección radican en su extraordinaria facilidad de planteamiento y de definición de las incógnitas básicas, su adecuada eficiencia computacional y la baja frecuencia de aparición de problemas de estabilidad numérica (mal condicionamiento del sistema de ecuaciones resultante).

Sin embargo, para determinados tipos estructurales, puede resultar más adecuado el método de las fuerzas que el de los movimientos. No obstante, su ge neralización para un tratamiento automático de estructuras arbitrarias es difi

cil, y por ello, resulta más conveniente en un cálculo manual.

Ejemplo 1.9

Cálculo de la viga continua de dos vanos, de sección constante y luces iguales, representada en la figura 1.10-a.

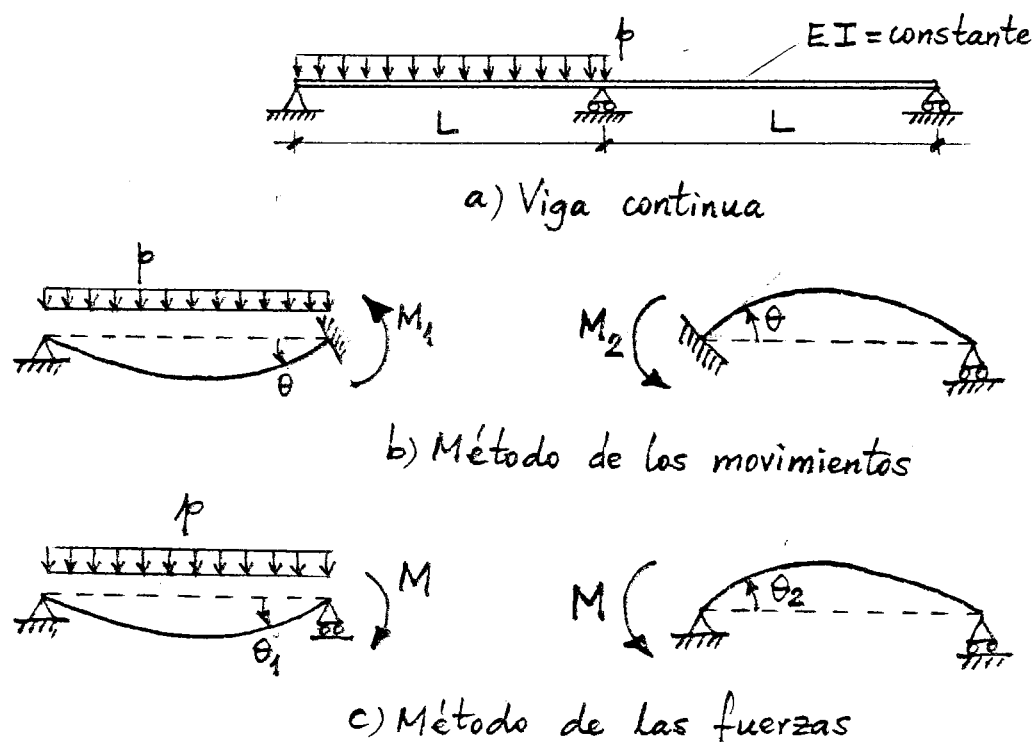


FIGURA 1.10 Cálculo de una viga continua de dos vanos.

a) Método de los movimientos (figura 1.10-b).

Se adopta como incógnita básica el giro θ en el apoyo central. Según las fórmulas de la resistencia de materiales, se obtiene, para el momento en ese apoyo:

$$\text{Vano 1: } M_1 = \frac{pL^2}{8} - \frac{3EI}{L} \theta$$

$$\text{Vano 2: } M_2 = \frac{3EI}{L} \theta$$

La ecuación de equilibrio es: $M_1 + M_2 = 0$

que, sustituidas las expresiones de M_1 y M_2 , conduce a la solución:

$$\theta = \frac{pL^3}{48EI} ; \quad M_1 = -M_2 = -\frac{pL^2}{16}$$

b) Método de las fuerzas (figura 1.10-c).

La incógnita básica considerada es, ahora, el momento flector M en el apoyo central. El giro de cada tramo de viga en el extremo de dicho apoyo es:

$$\text{Vano 1: } \theta_1 = -\frac{ML}{3EI} + \frac{pL^3}{24EI}$$

$$\text{Vano 2: } \theta_2 = \frac{ML}{3EI}$$

La ecuación de compatibilidad es: $\theta_1 = \theta_2$

y la solución es, finalmente:

$$M = \frac{pL^2}{16} ; \quad \theta_1 = \theta_2 = \frac{pL^3}{48EI}$$

1.10 CLASIFICACION DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Según se ha indicado con anterioridad, un sistema estructural está constituido por un ensamblaje arbitrario de diferentes estructuras más sencillas denominadas elementos estructurales. Estos corresponden a idealizaciones de cuerpos o estructuras reales, y la adecuación de esas idealizaciones será comentada más adelante, al tratar de cada uno de ellos. Ahora sólo se relacionan los elementos estructurales existentes.

a) Elementos rectos.

Son los más simples (figura 1.11) y pueden clasificarse como sigue, de acuerdo con sus dimensiones:

-Elemento línea (1-D). Representa la idealización de una viga recta.

-Elemento placa (2-D). Constituido por un plano representativo de la superficie media de la estructura real que se idealiza.

-Elemento volumétrico recto (3-D).

b) Elementos curvos.

Son topológicamente equivalentes a los elementos rectos anteriormente mencionados, si bien corresponden a geometrías más complicadas (figura 1.12). Se distinguen los siguientes:

- Elemento monodimensional curvo, idealización de un arco o viga curva (circular, helicoidal, etc.).
- Elemento lámina, constituido por una superficie.
- Elemento volumétrico curvado.

Los elementos línea y monodimensional curvo se suelen denominar barras.

Todos los elementos simples anteriores pueden formar estructuras o sistemas estructurales más complejos constituidos por una combinación arbitraria de aquellos.

De esta forma, los elementos simples pueden ser considerados como intersección de otros de mayor dimensionalidad. Por ejemplo, el nudo o elemento primario más simple surge de la intersección de dos barras.

Un caso especial y sumamente importante de sistemas estructurales -denominados en lo sucesivo simplemente estructuras- está constituido por los sistemas discretos o entramados (*), formados únicamente por nudos y barras (figura 1.13).

Conviene tener presente que el cálculo de una estructura depende no sólo de ella en sí misma, sino también del número de grados de libertad considerados, aparte, naturalmente, del carácter del propio cálculo (lineal o no, dinámico o estático, con fenómenos viscosos, etc.). Por ejemplo, una estructura de nudos y barras puede ser una celosía o un entramado, planos o espaciales, traslacionales o no, etc., dependiendo del número de grados de libertad que se consideren en cada nudo (figura 1.7). En las tablas 1.2 y 1.3 se presenta un resumen de los diferentes sistemas estructurales en función de los gdl considerados (figura 1.14).

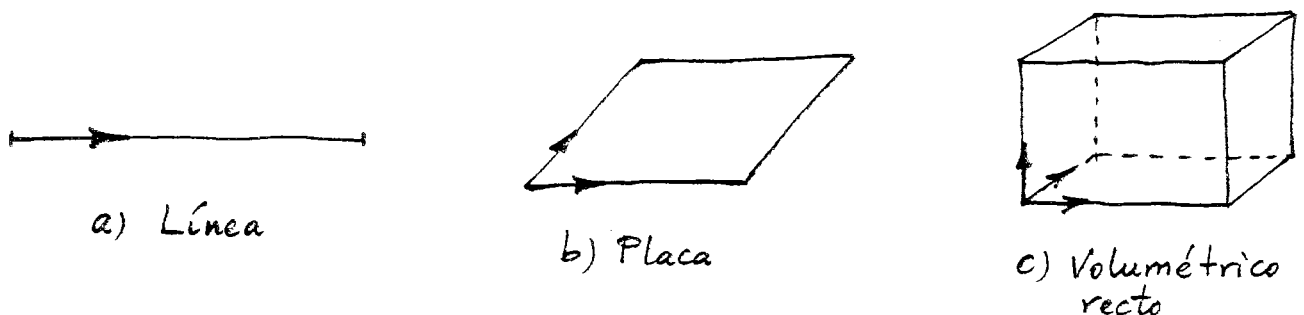
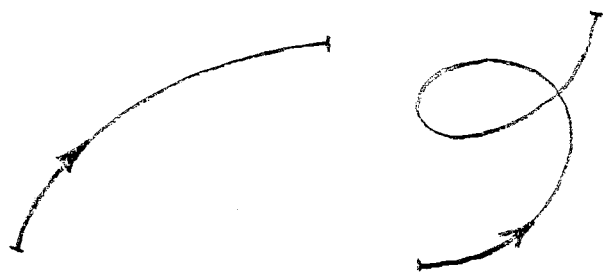
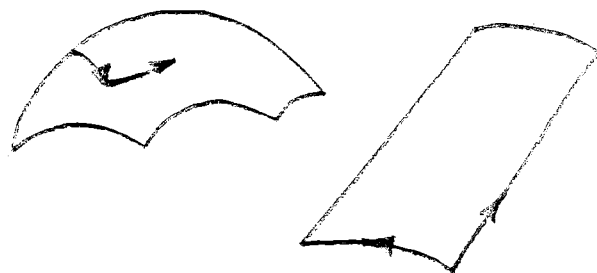


Fig. 1.11 - Elementos estructurales rectos

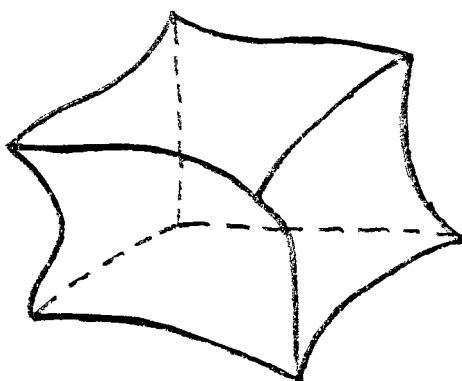
NOTA(*): Denominados en la literatura anglosajona "skeleton structures".



a) Monodimensional curvo
(circular y helicoidal)

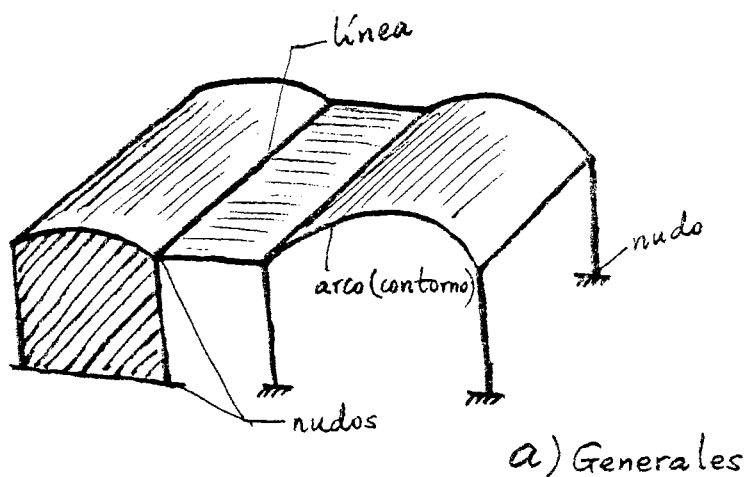


b) Lámina
(esférica y cilíndrica)

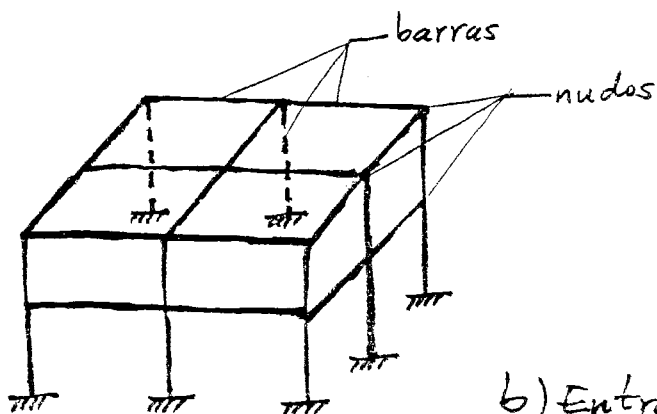
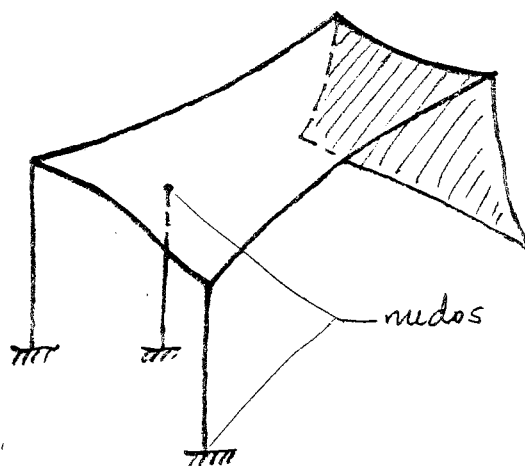


c) Volumétrico curvo

FIG. 1.12 - Elementos estructurales curvos



a) Generales



b) Entramados

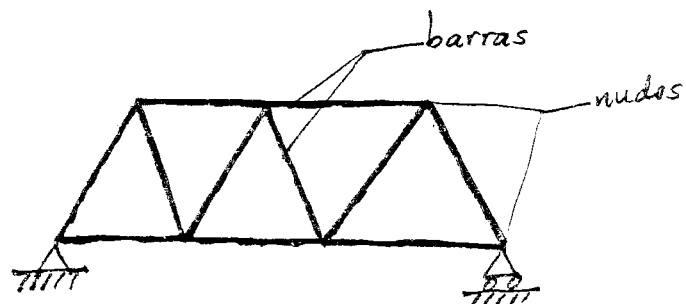


FIG. 1.13 - Sistemas estructurales

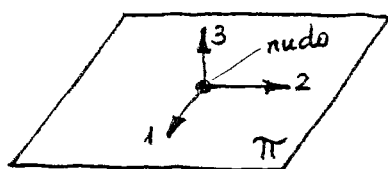
ESTRUCTURA	DENOMINACION	GDL POR NUDO
Plana	Celosía	1-2
	Entramado intraslacional	6
	Entramado general	1-2-6
	Emparrillado	3-4-5
Espacial	Celosía	1-2-3
	Entramado	1-2-3-4-5-6

TABLA 1.2 Estructuras discretas.

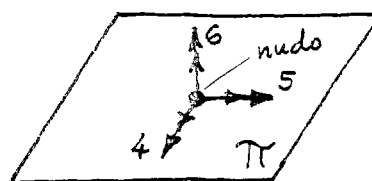
ESTRUCTURA		DENOMINACION	GDL POR NUDO
3D	Revolución	Elástica bidimensional	1-2
	General	Elástica tridimensional	1-2-3
2D	Plana	Placa delgada	3
		Placa gruesa	3-4-5
		Elástica bidimensional (tensión o deformación planas). Laja.	1-2
	No Plana	Lámina rebajada	3
		Membrana	1'-2'
		Lámina delgada	1-2-3
		Lámina gruesa	1-2-3-4-5
1D	Recta	Barra recta	1
		Viga delgada recta	3
		Viga recta gruesa	3-6
	Plana	Arco	1'
		Viga curva delgada	1-2
		Viga curva gruesa	1-2-6
		Viga balcón delgada	3-4'
	Alabeada	Viga alabeada gruesa (sección maciza)	1-2-3-4-5-6

TABLA 1.3 Estructuras continuas.

- (1) NOTA: 1', 2', 4' designan gdl según ejes locales específicos intrínsecos de la estructura (tangente o normal). En la barra recta, 3 y 6 designan gdl perpendiculares a la recta directriz.
- (2) NOTA: Los gdl de las estructuras delgadas, al imponerse la condición de normalidad de Navier-Kirchoff, pueden reducirse a uno, a partir de los dos de las estructuras gruesas. En efecto, el giro se puede expresar en función de las derivadas de la flecha normal, por lo que, si se conoce la ley continua de ésta se deduce aquél.



a) Grados de libertad
fundamentales (orden 0)



b) Grados de libertad
derivados (orden 1)

FIG. 1.14 - Grados de libertad en un nudo

CAPITULO 2.- ESTRUCTURAS ARTICULADAS. CLASIFICACION

2.1. DEFINICIONES

Se denomina estructura articulada a aquélla que está constituida por barras que se enlazan entre sí mediante articulaciones. No pueden, por lo tanto, existir momentos flectores en los extremos de dichas barras. Si la geometría de la estructura, así como las fuerzas que actúan sobre ella, están contenidas en un plano, ésta se denomina articulada plana; y espacial en caso contrario (figura 2.1). En esta última situación es necesario que en uno o en ambos extremos de cada barra exista coacción al giro según la recta que los une, a fin de evitar el movimiento al giro como sólido rígido de la barra alrededor de esta recta y garantizar, por consiguiente, el trabajo a torsión de la barra.

Normalmente, las barras son rectas y forman mallas triangulares, por lo que se llaman también estructuras trianguladas, y, asimismo, celosías.

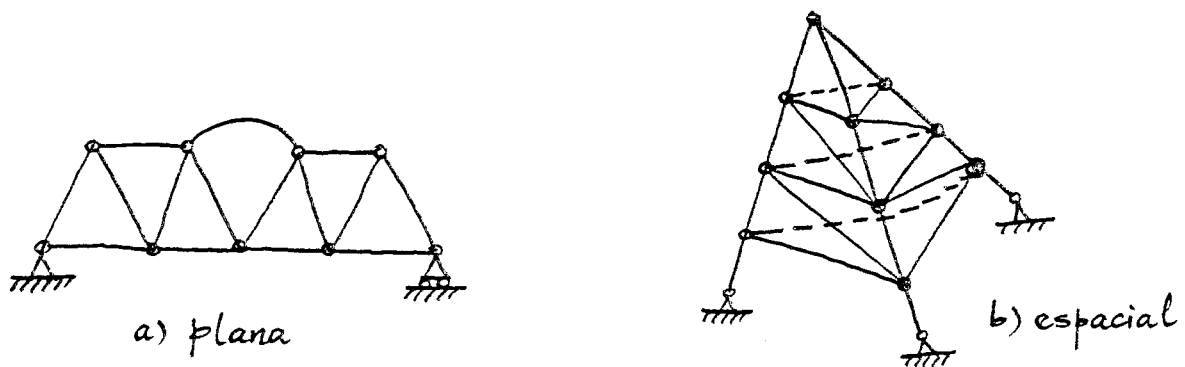


FIGURA 2.1.- Estructuras articuladas.

Dado que las rótulas de unión de barras no son capaces de transmitir momentos flectores -se supone que no existe rozamiento en la unión-, sobre cada uno de los nudos extremos de la barra sólo pueden existir como reacciones dos fuerzas (figura 2.2). Alternativamente, los giros en los extremos de barras que concurren en una rótula son independientes entre sí, al no existir coacción al giro.

2.2. IDEALIZACION

Las estructuras articuladas corresponden, en general, a idealizaciones de construcciones formadas por el ensamblaje de piezas planas articuladas entre sí. Sin embargo, si las barras son suficientemente esbeltas, (*) es posible la idealización mediante el tipo estructural celosía, incluso en el caso en que las uniones

(*) Se denomina esbeltez de una pieza recta a la relación entre su longitud y el radio de giro de su sección transversal.

entre barras sean rígidas, ya que los esfuerzos de flexión producidos por la continuidad total del enlace son pequeños a causa del elevado valor de la referida esbeltez.

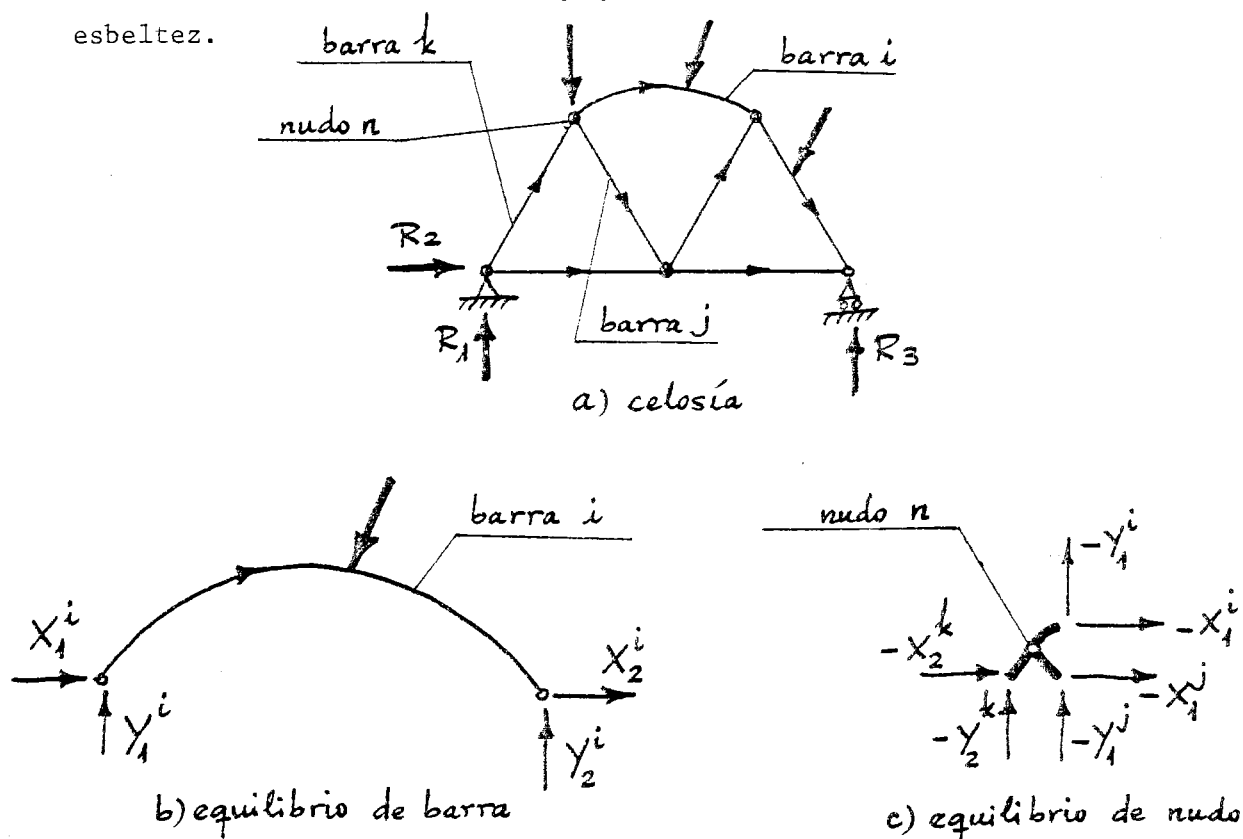


FIGURA 2.2.- Equilibrios de barras y nudos.

Generalmente las estructuras articuladas se utilizan en la construcción metálica, en donde las barras son perfiles muy esbeltos y, por lo tanto, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, es válida la suposición de nudos articulados, a pesar de que las uniones se realicen mediante soldadura o tornillos de alta resistencia y sean, por ello, rígidas. Sin embargo, en caso de que la hipótesis anterior no sea aceptable, debido a valores bajos de la esbeltez de las barras, es necesario tener en cuenta los esfuerzos adicionales que se producen como consecuencia de la rigidez existente en los enlaces, lo cual se puede llevar a cabo mediante un cálculo estructural como entramado plano, de acuerdo con el proceso que se comenta en un capítulo posterior.

En determinadas ocasiones se realizan construcciones de hormigón que pueden ser analizadas como estructuras articuladas, al menos en una primera aproximación, y se determinan, así, los esfuerzos principales, que son los debidos a la forma más importante del trabajo de la estructura. Estas construcciones deben ser tales que, supuestas articuladas en sus nudos, sean estructuras estables y

no mecanismos. (*)

2.3. CLASIFICACION

2.3.1. Introducción

Existen determinados tipos de celosías que pueden ser calculados utilizando únicamente las ecuaciones de equilibrio de la estática. El cálculo consiste en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio de cada barra y cada nudo de la estructura, que permiten obtener las reacciones de los apoyos de la estructura y las reacciones que sobre cada barra ejerce el resto de aquélla. Se pueden, de este modo, clasificar las estructuras de acuerdo con las posibilidades de dicho análisis. Para ello, es necesario definir el número de ecuaciones y el de incógnitas disponibles.

En el caso de celosías planas, el número de incógnitas por cada barra es de cuatro, correspondientes a las reacciones en sus nudos extremos (figura 2.2-b). Existe, además, un número C de reacciones desconocidas, igual al de coacciones exteriores que imponen los apoyos de la estructura. Por lo tanto, si se designa por B el número de barras de ésta, las incógnitas totales son:

$$I = 4B + C \quad (2.1)$$

Por otra parte, el número de ecuaciones que proporciona la estática es:

$$E = 3B + 2N \quad (2.2)$$

siendo N el número de nudos de la celosía (incluidos los apoyos).

Las 3B ecuaciones de equilibrio provienen de considerar el equilibrio de cada una de las barras de la estructura (equilibrios de fuerzas según dos ejes y equilibrio de momentos respecto a un punto), mientras que las 2N ecuaciones restantes corresponden al equilibrio de fuerzas en cada nudo, según dos ejes, dado que el equilibrio de momentos se satisface automáticamente en este caso. En efecto, al ser todas las fuerzas concurrentes y no existir momento aplicado en el nudo, el momento en éste es idénticamente nulo.

(*) Una definición de mecanismo se presenta más adelante.

El anterior sistema de ecuaciones de la estática (2.2) puede expresarse en la siguiente forma matricial:

$$\underline{F} \cdot \underline{X} = \underline{P} \quad (2.3)$$

en donde

$$\underline{X}^T = \{X_1^1, Y_1^1, X_2^1, Y_2^1, \dots, X_1^i, Y_1^i, X_2^i, Y_2^i, \dots, X_1^B, Y_1^B, X_2^B, Y_2^B, R_1, \dots, R_c\}$$

es un vector columna de dimensión $I = 4B + C$, que contiene a todas las incógnitas del problema: reacciones en las coacciones de apoyo y reacciones del resto de la estructura sobre los extremos de cada barra.

$\underline{P}^T = \{P_1, P_2, \dots, P_E\}$ es un vector columna, de dimensión E , cuyos elementos son las componentes de la resultante de las fuerzas exteriores sobre las distintas barras (fuerzas según dos direcciones, más un momento) más las dos componentes de las fuerzas exteriores sobre los nudos.

Los coeficientes de la matriz \underline{F} dependen de la geometría de la estructura (conexión de las barras entre sí, ángulos relativos y direcciones de las coacciones de apoyo) y son constantes, es decir, independientes de las incógnitas, ya que el cálculo es lineal y el equilibrio se plantea en la geometría de la estructura antes de la deformación. La matriz \underline{F} es de dimensión $E \times I$.

Si el sistema (2.3) puede ser resuelto, la determinación de los esfuerzos en las barras de la estructura es un problema muy simple. En efecto, para cada una de ellas se conocen todas las acciones aplicadas, incluidas las reacciones en sus extremos. Por lo tanto, la deducción de las leyes de esfuerzos a lo largo de la barra se lleva a cabo determinando, en cada sección de ésta, la resultante (componentes normal y tangencial) y momento de todas las fuerzas frontales (o dorsales).

Es importante analizar qué tipos de estructuras pueden ser calculadas utilizando únicamente las ecuaciones del sistema (2.3), es decir, exclusivamente mediante ecuaciones de equilibrio. Esas estructuras se denominan isostáticas.

Sin embargo, resulta evidente que en determinados casos no existe solución al anterior sistema; en estas circunstancias las estructuras no son estables y se suelen denominar con el nombre genérico de mecanismos.

Por último, pueden existir estructuras para las cuales el citado sistema (2.3) involucra un número superabundante de incógnitas, por lo que carece de solución única. Es, pues, necesario recurrir a ecuaciones adicionales en las que intervienen movimientos (condiciones de compatibilidad), con objeto de deducir la solución única correspondiente al problema elástico. Estas estructuras se denominan, por este motivo, hiperestáticas (para su resolución no son suficientes las condiciones de equilibrio que proporciona la estática).

A continuación se describe con un mayor detalle la clasificación anterior.

2.3.2. Estructuras isostáticas

Una estructura isostática se caracteriza por resistir, mediante un conjunto único de esfuerzos en sus barras, la acción de cualquier sistema de fuerzas exteriores. En consecuencia, se pueden determinar esos esfuerzos a través de las condiciones de equilibrio, sin necesidad de conocer los movimientos y deformaciones de las barras (figura 2.3).

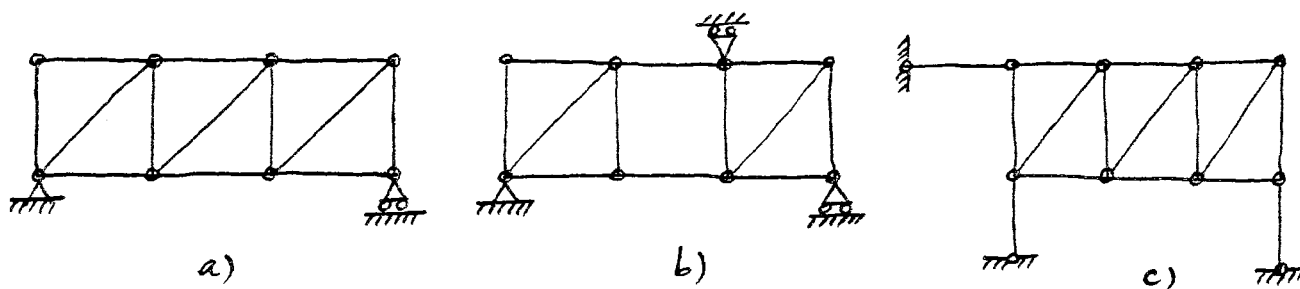


FIGURA 2.3.- Estructuras isostáticas.

Matemáticamente, la condición necesaria y suficiente de isostatismo es que el sistema de ecuaciones (2.3) tenga solución única para un conjunto arbitrario de cargas, definidas en el término independiente \underline{P} . Ello implica que existe inversa de \underline{F} y, por lo tanto, la matriz de coeficientes, \underline{F} , es cuadrada y regular; es decir:

$$I = E \text{ (o, equivalentemente, } B = 2N - C) \quad (2.4)$$

$$|\underline{F}| \neq 0 \quad (2.5)$$

En ese caso, la solución del sistema (2.3) es:

$$\underline{X} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{P} \quad (2.6)$$

Se observa que la condición (2.4) es necesaria, pero no suficiente, para asegurar el isostatismo de la estructura. Debe, además, verificarse que el determinante de F sea distinto de cero. Se comprende que esto deba ser así, puesto que, sin modificar la condición (2.4), sería posible cambiar una barra de la estructura, suprimiéndola de una parte de la misma y llevándola a otra, con el resultado de que una zona de la citada estructura podría, así, tener superabundancia de barras, mientras que otra sería inestable. De esta forma, la estructura es globalmente inestable, no obstante verificar la condición (2.4).

También es posible disminuir el número de coacciones e incrementar en la misma cantidad el de barras, con lo cual la estructura, en sí misma, se hace internamente hiperestática y, en cambio, constituye un mecanismo por su sustentación.

En otras ocasiones, basta una modificación en las direcciones de las coacciones para obtener una estructura inestable o mecanismo.

En los siguientes ejemplos se trata de ilustrar las ideas anteriores.

Ejemplo 2.1.

Comprobar que las estructuras isostáticas de la figura 2.3 cumplen la condición necesaria (2.4).

SOLUCION:

Estructura 2.3-a. $B = 13; N = 8; C = 3$

$$B = 13 = 2N - C = 16 - 3$$

Estructura 2.3-b. $B = 12; N = 8; C = 4$

$$B = 12 = 2N - C = 16 - 4$$

Estructura 2.3-c. $B = 16; N = 11; C = 6$

$$B = 16 = 2N - C = 22 - 6$$

Ejemplo 2.2.

Compruébese que las estructuras representadas en la figura 2.4 satisfacen la condición (2.4) y razónese por qué son mecanismos.

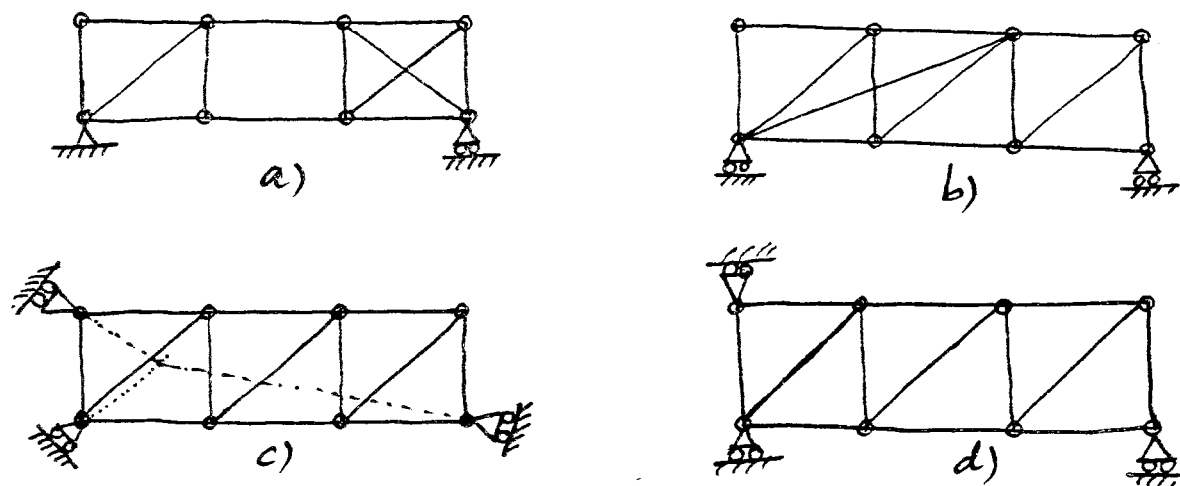


FIGURA 2.4.- Estructuras inestables (mecanismos).

SOLUCION:

Estructura 2.4-a. $B = 13$; $N = 8$; $C = 3$

$$B = 13 = 2N - C = 16 - 3$$

Se observa que verifica la condición (2.4); sin embargo no se trata de una estructura isostática, lo cual se podría comprobar calculando (2.6), y viendo que no hay solución. Existe un procedimiento más cómodo de efectuar la comprobación anterior, que consiste en verificar si, ante un sistema arbitrario de cargas, la estructura es capaz de admitir grandes movimientos, compatibles con las condiciones de sustentación, sin que las barras experimenten deformaciones.

En este caso concreto, ello es posible, tal como se muestra en la figura 2.5.

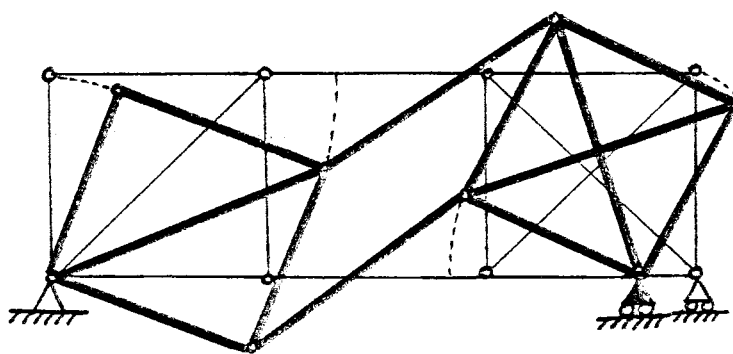


FIGURA 2.5.- Grandes movimientos en un mecanismo.

No sucedería lo mismo en el caso representado en la figura 2.3-b que corresponde a una estructura isostática.

Estructura 2.4-b. $B = 14$; $N = 8$; $C = 2$

$$B = 14 = 2N - C = 16 - 2$$

Se satisface la condición (2.4) pero se trata de un mecanismo dado que es incapaz de admitir acciones horizontales. Es decir, existe una insuficiencia de coacciones externas.

$$\begin{aligned}\text{Estructura 2.4-c. } B &= 13; \quad N = 8; \quad C = 3 \\ B &= 13 = 2N - C = 16 - 3\end{aligned}$$

Es otro mecanismo, puesto que es posible un giro de la estructura alrededor del punto de intersección de las tres direcciones de coacción.

$$\begin{aligned}\text{Estructura 2.4-d. } B &= 13; \quad N = 8; \quad C = 3 \\ B &= 13 = 2N - C = 16 - 3\end{aligned}$$

Corresponde también a un mecanismo al no admitir acciones horizontales.

Como complemento a lo anteriormente expuesto referente a estructuras isostáticas, es conveniente señalar que cuando la estructura (isostática) está descargada, sólo existe la solución trivial $\underline{X} = \underline{0}$; es decir, la introducción de deformaciones impuestas en las barras (temperatura, errores de ejecución en sus longitudes, etc.) no produce esfuerzos. Por lo tanto, el sistema:

$$\underline{F} \cdot \underline{X} = \underline{0}$$

carece de solución distinta de la trivial.

Resumiendo, una estructura isostática se caracteriza por las siguientes condiciones matemáticas, según un conocido teorema del álgebra:

$$\underline{F} \cdot \underline{X} = \underline{P}$$

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P}) = r \quad (2.7-a)$$

$$r = n \quad (2.7-b)$$

$$\text{siendo } n = E = I \quad (2.7-c)$$

2.3.3. Estructuras críticas isostáticas

En algunas ocasiones se da la circunstancia de que, a causa de la geometría estructural (ángulos y longitudes de las barras), una estructura isostática conduce a una matriz \underline{F} singular. Es decir, se cumple:

$$B = 2N - C \quad \text{y} \quad |\underline{F}| = 0$$

Estas estructuras se denominan críticas.

Por lo tanto, se puede deducir del teorema de Rouché-Frobenius que el sistema (2.3) tiene solución sólo si se cumple:

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P}) = r < n$$

con $n = E = I$

y, por otra parte, bajo cargas nulas existen $k = (n-r)$ soluciones linealmente independientes para X, es decir, el sistema:

$$\underline{F} \cdot \underline{X} = \underline{0}$$

tiene infinitas soluciones distintas de la trivial. (*)

Desde un punto de vista físico, una estructura crítica se caracteriza por ser capaz de producir estados de esfuerzos (**) en sus barras, en autoequilibrio (bajo fuerzas exteriores nulas). Por otra parte, sólo para ciertos sistemas de cargas exteriores puede comportarse como estructura, y generar esfuerzos en las barras que equilibren dichas cargas exteriores. Ahora bien, estos esfuerzos no son únicos, puesto que se les puede añadir uno cualquiera de los estados en autoequilibrio antes mencionados.

Por lo tanto, en un caso general de cargas, una estructura crítica no puede generar -dentro de la teoría lineal de estructuras- los esfuerzos en sus barras necesarios para lograr el equilibrio estructural.

La propiedad anterior caracteriza a las estructuras isostáticas críticas.

(*) El número $k = n-r$ indica el orden o grado crítico de la estructura.

(**) Se expresa aquí mediante el término esfuerzos a las componentes del vector de incógnitas X.

También es posible, de un modo dual, definir la estructura crítica como aquella que puede experimentar un movimiento infinitesimal de sólido rígido (sin deformaciones en las barras). Esta propiedad puede ser deducida de forma inmediata a partir de la aplicación del principio de los trabajos virtuales, cuyo estudio se realiza en un capítulo posterior.

Ejemplo 2.3.

Compruébese que las estructuras representadas en la figura 2.6 son críticas.

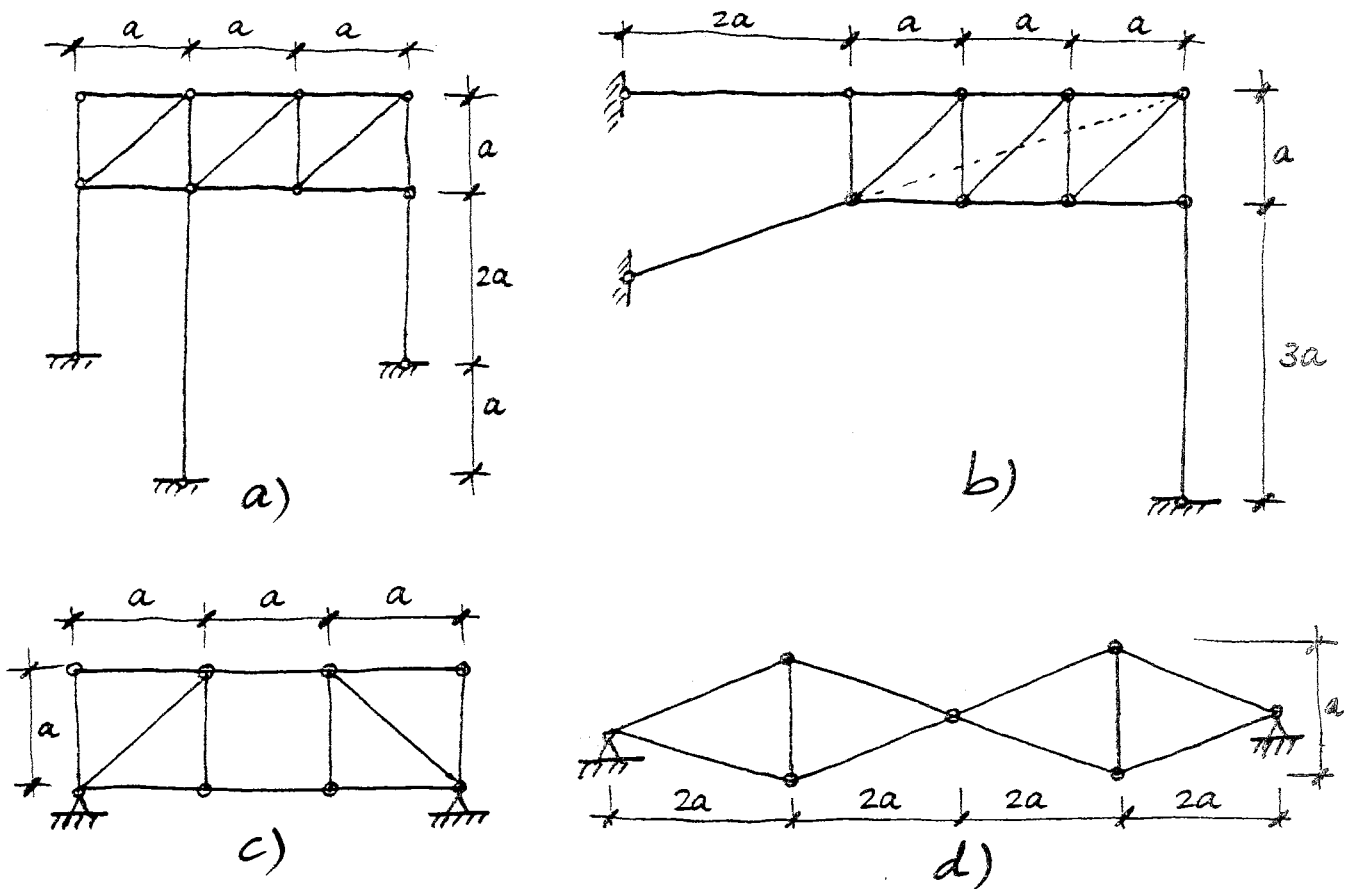


FIGURA 2.6.- Estructuras críticas isostáticas. Geometría.

SOLUCION:

Estructura a: $B = 16$; $N = 11$; $C = 6$; $B = 16 = 2N - C$

Estructura b: $B = 16$; $N = 11$; $C = 6$; $B = 16 = 2N - C$

Estructura c: $B = 12$; $N = 8$; $C = 4$; $B = 12 = 2N - C$

Estructura d: $B = 10$; $N = 7$; $C = 4$; $B = 10 = 2N - C$

Se observa, pues, que en todos los casos se verifica la condición necesaria de isostatismo. Pero en todos ellos, asimismo, es posible imponer un movimiento

infinitesimal de sólido rígido, como se muestra en la figura 2.7.

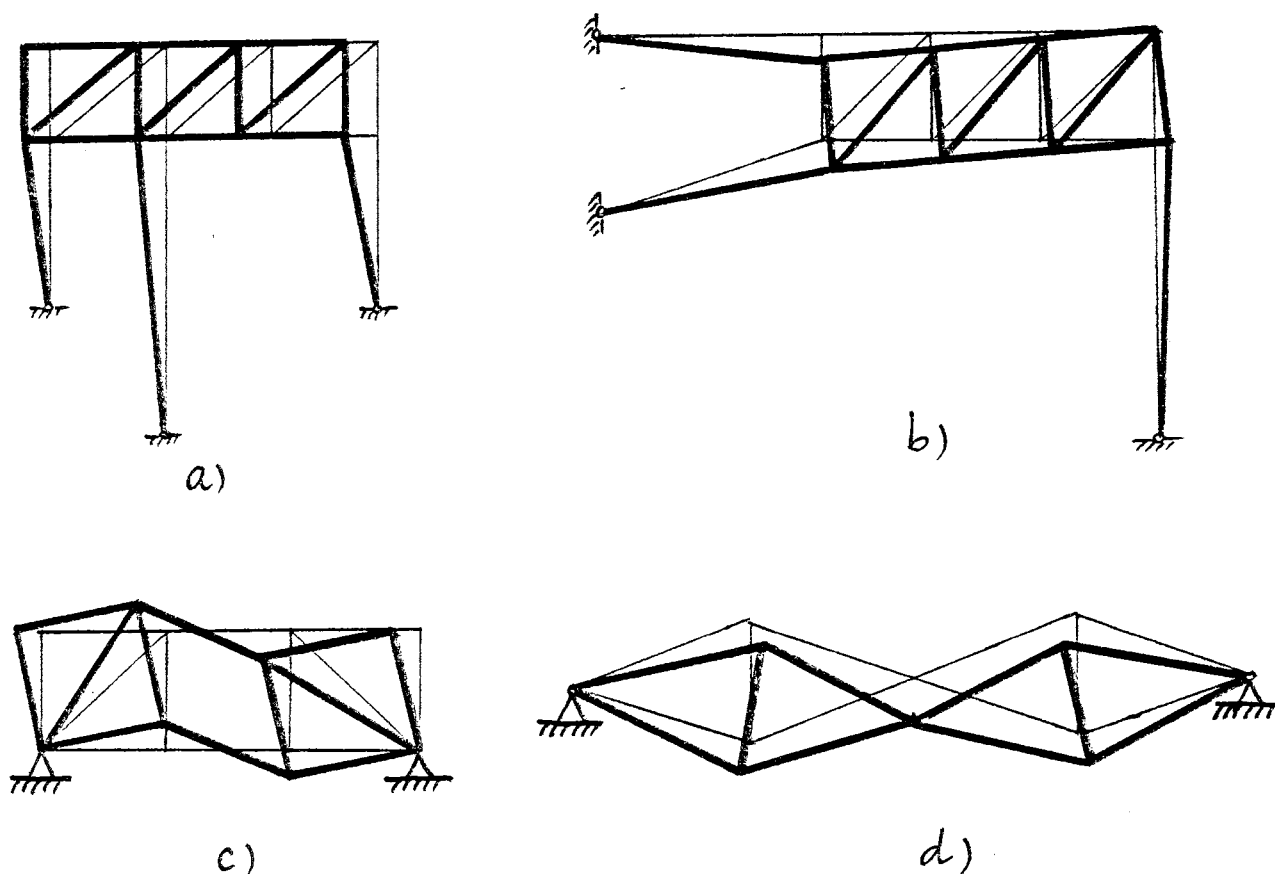


FIGURA 2.7.- Estructuras isostáticas críticas. Movimientos infinitesimales de sólido rígido.

Por último, en la figura 2.8 se representan los sistemas de esfuerzos en las barras con resultante exterior nula.

Se comprende, por la propia definición de estructura isostática crítica, que ésta constituye una situación singular de estructura isostática que, para una determinada configuración de su geometría, se transforma en crítica, es decir, $|F| = 0$. Por ello, si se considera el cálculo no lineal de la estructura, en grandes movimientos, de acuerdo con éstos la geometría crítica inicial se modifica y con ella la matriz F , por lo que es posible deducir un único sistema de esfuerzos que equilibren cualquier estado de cargas. Así pues, las estructuras isostáticas, críticas o no, tienen idéntico tratamiento en cálculo no lineal en grandes movimientos.

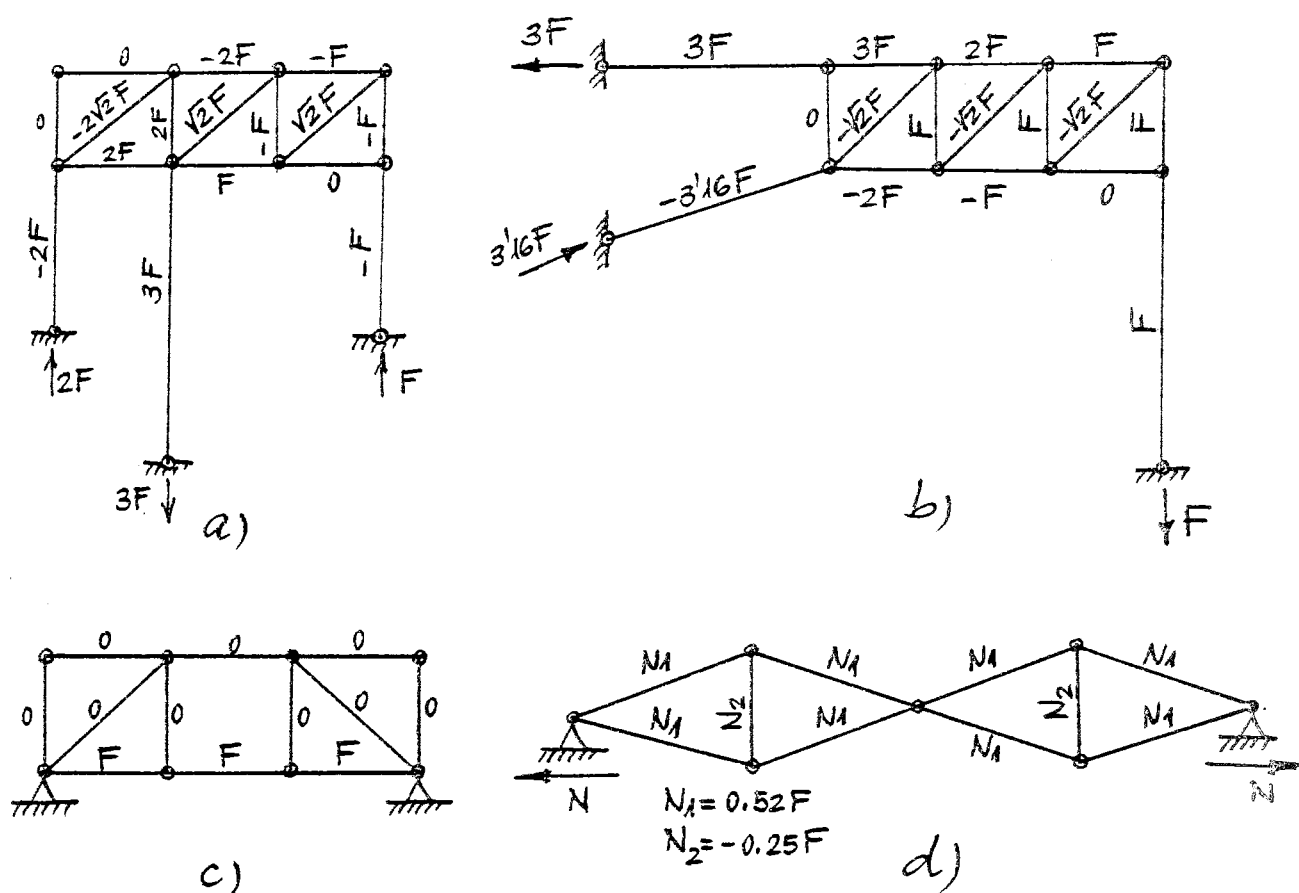
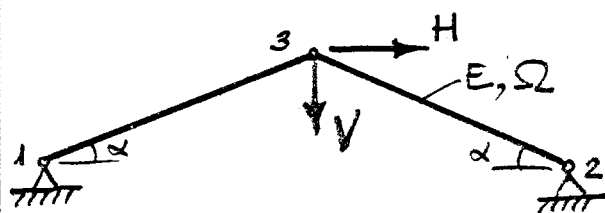


FIGURA 2.8.- Estructuras isostáticas críticas. Estados en autoequilibrio.

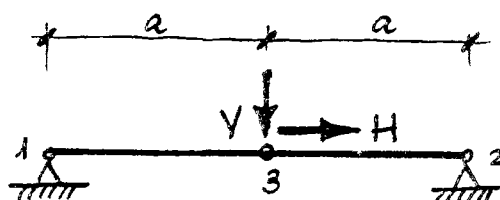
Sin embargo, dentro del rango lineal, la estructura crítica no puede ser calculada, por las razones expuestas. Esto hace que normalmente no se debe proyectar este tipo de estructuras, puesto que conducen a esfuerzos muy elevados en sus barras y a grandes movimientos, generalmente inadmisibles.

Ejemplo 2.4.

Una estructura crítica muy sencilla corresponde a la triangulación constituida por dos barras, con el ángulo $\alpha = 0$ (figura 2.9).



a) estructura isostática



b) estructura isostática crítica

FIGURA 2.9.- Ejemplo 2.4.

Fácilmente se comprueba que la estructura de la figura 2.9-b es crítica. En efecto, se tiene $B = 2$; $N = 2$; $C = 4$, y se verifica $B = 2 = 2N - C = 2 \times 3 - 4$, condición necesaria de estructura isostática. Sin embargo, es posible obtener un sistema de esfuerzos en autoequilibrio (figura 2.10-a), o bien imponer un movimiento infinitesimal de sólido rígido (figura 2.10-b).

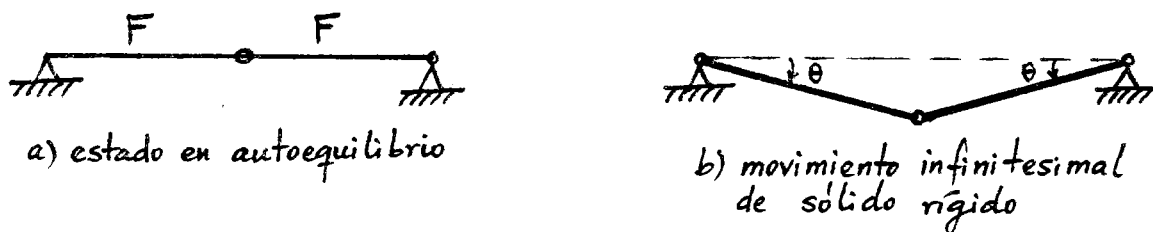


FIGURA 2.10.- Comprobación de estructura crítica.

Por otra parte, en un cálculo lineal los esfuerzos que aparecen bajo las cargas V y H se deducen del sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{13} \\ N_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ H \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

siendo N_{ij} el esfuerzo axial en la barra $i-j$, y considerando positivas las tracciones.

A partir de (2.8) y en el caso en que $V \neq 0$, se comprueba que no existe solución. Por el contrario, si $V=0$, los esfuerzos en las barras no están determinados, dado que, de la segunda ecuación (2.8), se infiere:

$$N_{13} - N_{23} = H$$

y resulta

$$N_{13} = F \quad ; \quad N_{23} = -H + F$$

siendo F arbitrario.

Si se lleva a cabo un cálculo no lineal en grandes movimientos y pequeñas deformaciones (figura 2.11), se obtiene, suponiendo por simplicidad que $H=0$:

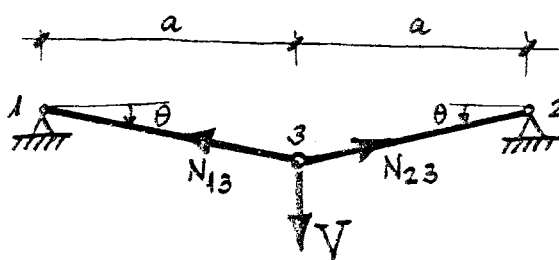


FIGURA 2.11.- Cálculo no lineal de una estructura crítica.

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \text{sen}\theta \\ \text{cos}\theta & -\text{cos}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{13} \\ N_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$N_{13} = N_{23} = V/2\text{sen}\theta$$

Los esfuerzos N_{ij} anteriores se relacionan con las deformaciones de las barras mediante la ley de Hooke, es decir:

$$N_{13} = N_{23} = E\Omega\varepsilon_{13} = E\Omega\varepsilon_{23} = E\Omega \frac{\frac{a}{\text{cos}\theta} - a}{a} = E\Omega \left(\frac{1}{\text{cos}\theta} - 1 \right)$$

o lo que es igual

$$\frac{V}{2\text{sen}\theta} = E\Omega \left(\frac{1}{\text{cos}\theta} - 1 \right)$$

y reagrupando convenientemente

$$\frac{V}{2E\Omega} = \text{tg}\theta - \text{sen}\theta \quad (2.9)$$

Por consiguiente, el valor del giro θ se obtiene resolviendo la ecuación anterior, si se expresa el giro en función del ángulo mitad, resulta la ecuación algebraica de 4º grado:

$$\left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right)^4 - \frac{2V}{E\Omega} \left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right)^3 - 1 = 0$$

que, una vez resuelta, permite obtener los valores de los esfuerzos:

$$N_{13} = N_{23} = \frac{2E\Omega}{\left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^2 - 1}$$

Es posible deducir una expresión explícita aproximada de los esfuerzos si se considera que $\theta^2 \ll 1$ (pequeñas deformaciones) y se desarrolla en serie en la fórmula (2.9):

$$\frac{V}{2E\Omega} = \operatorname{tg}\theta - \operatorname{sen}\theta \approx \frac{\theta^3}{2}, \text{ es decir } \theta = \left(\frac{V}{E\Omega}\right)^{1/3} \text{ y, por lo tanto:}$$

$$N_{13} = N_{23} = \frac{V}{2\operatorname{sen}\theta} \approx \frac{V}{2\theta} = \frac{1}{2}(E\Omega V)^{2/3}$$

2.3.4. Estructuras hiperestáticas

Se dice que una estructura es hiperestática de grado α cuando es capaz de generar α sistemas de esfuerzos en sus barras, linealmente independientes, que equilibran a un conjunto arbitrario de acciones exteriores. Por lo tanto, las ecuaciones de la estática, en este tipo de estructuras, no determinan unívocamente la solución elástica del problema ^(*), cuya obtención requiere la utilización de las ecuaciones de compatibilidad.

Matemáticamente una estructura hiperestática se caracteriza por las siguientes condiciones referidas al sistema de ecuaciones de equilibrio (2.3):

$$\underline{F} \underline{X} = \underline{P} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rango}(\underline{F}) = \operatorname{rango}(\underline{F}, \underline{P}) = r = E < I$$

Conviene observar que la condición $I > E$ equivale a

$$B > 2N - C$$

una vez consideradas las relaciones (2.1) y (2.2). Esa condición, por sí sola, representa una condición necesaria, pero no suficiente, de hiperestatismo.

El grado de hiperestatismo es $\alpha = I - E = B + C - 2N$.

(*) Es la solución para la cual se satisfacen, además de las ecuaciones de equilibrio de la estructura, las condiciones de compatibilidad.

Para determinadas situaciones particulares de geometría que conducen a $|\underline{F}|=0$, la estructura hiperestática es crítica y en ese caso el sistema (2.3) no tiene, en general, solución para un conjunto arbitrario de cargas \underline{P} . Se verifica:

$$\text{rango}(\underline{F}) = \text{rango}(\underline{F}, \underline{P}) = r < E < I$$

El grado de hiperestatismo sigue siendo $\alpha = I-E$ y $k = E-r$ se denomina orden o grado crítico de la estructura.

Tal como se ha mencionado en el caso de estructuras isostáticas, las hiperestáticas críticas sólo pueden ser calculadas en régimen no lineal con grandes movimientos. En esa situación la geometría deformada proporciona una estructura no crítica de grado de hiperestatismo $\alpha = I-E$.

Ejemplo 2.5.

Clasificar las estructuras representadas en la figura 2.12.

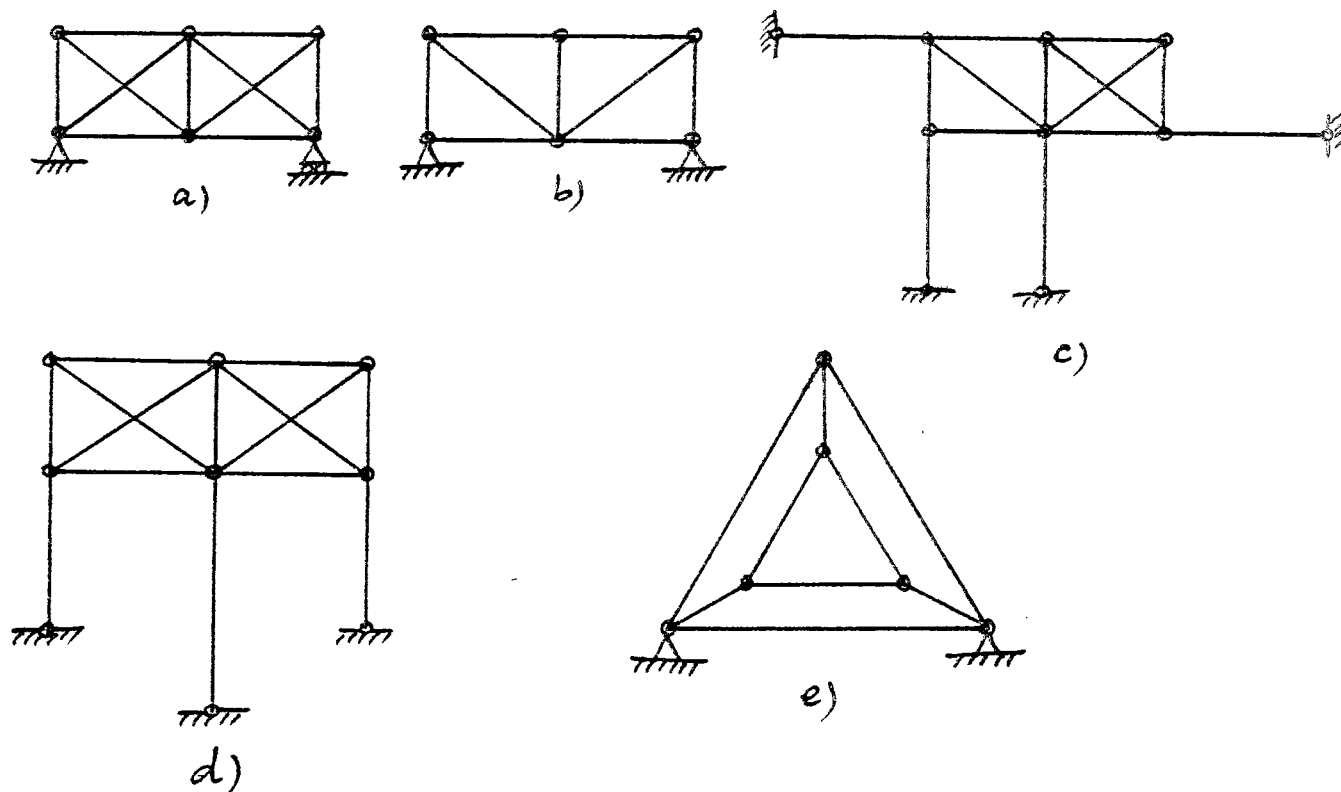


FIGURA 2.12.- Ejemplo 2.5.

SOLUCION:

Estructura a: $B = 11$; $N = 6$; $C = 3$; $B > 2N-C$

$$\alpha = I-E = B+C-2N = 2$$

Se trata de una estructura hiperestática de grado 2. Conviene señalar que el hiperestatismo se produce en este caso por la existencia de coacciones internas superabundantes (barras adicionales), mientras que el número de apoyos es el estricto de una estructura isostática, por lo que las reacciones en los mismos se pueden obtener utilizando únicamente los recursos de la estática (ecuaciones de equilibrio). Así pues, la estructura es isostática por su sustentación (isostática externamente) e hiperestática internamente, con grado de hiperestatismo igual a dos.

$$\text{Estructura b: } B = 9; N = 6; C = 4; B > 2N - C$$

$$\alpha = I - E = B + C - 2N = 1$$

Es una estructura hiperestática de grado 1. En este caso la triangulación interior corresponde a una estructura isostática y el hiperestatismo se debe a un exceso de coacciones externas (estructura hiperestática externamente). Ahora ni siquiera las reacciones pueden ser calculadas mediante la estática.

$$\text{Estructura c: } B = 14; N = 10; C = 8; B > 2N - C$$

$$\alpha = B + C - 2N = 2$$

Se trata de una estructura hiperestática de grado 2.

$$\text{Estructura d: } B = 14; N = 9; C = 6; B > 2N - C$$

$$\alpha = B + C - 2N = 2$$

El grado de hiperestatismo es 2; la estructura es crítica, dado que admite el movimiento infinitesimal de sólido rígido que se muestra en la figura 2.13-a.

$$\text{Estructura e: } B = 9; N = 6; C = 4; B > 2N - C$$

$$\alpha = B + C - 2N = 1$$

El grado de hiperestatismo es 1 y la estructura es crítica. El movimiento infinitesimal de sólido rígido se observa en la figura 2.13-b, mientras que en 2.13-c se representa un estado de esfuerzos en autoequilibrio, característica de las estructuras críticas.

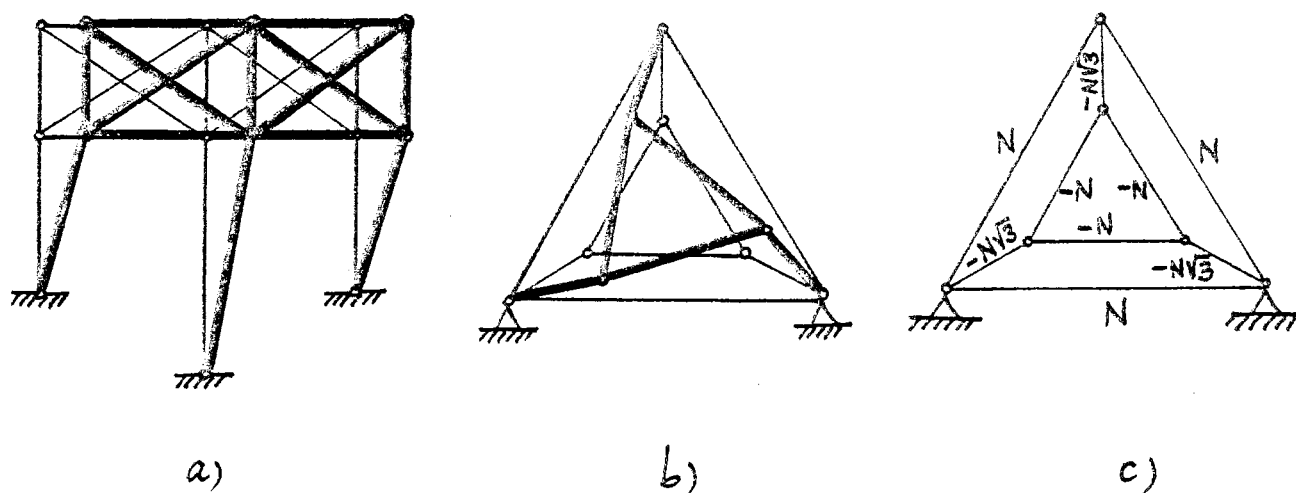


FIGURA 2.13.- Estructuras críticas hiperestáticas.

Para la determinación del grado crítico de las estructuras anteriores no es necesario recurrir a la expresión $k = r - E$, siendo $r = \text{rango } (F) = \text{rango } (F, P)$. En efecto, el grado crítico coincide con el número de movimientos infinitesimales de sólido rígido, linealmente independientes, que pueden producirse en la estructura. En ambos ejemplos anteriores dicho grado es igual a uno.

2.3.5. Estructuras inestables o mecanismos

Aunque este tipo de estructuras ya ha sido mencionado anteriormente, se analizan en este apartado con mayor profundidad, estudiando asimismo las condiciones que cumplen desde un punto de vista matemático.

Una estructura es inestable (o mecanismo) si presenta una de las dos propiedades siguientes:

- La estructura admite grandes movimientos sin deformarse.
- Existen conjuntos de acciones exteriores que no pueden ser equilibrados mediante esfuerzos en las barras, ya sea con la geometría inicial de la estructura, ya con la final.

Un mecanismo se produce cuando el número de ecuaciones de equilibrio de la estructura es superior al de incógnitas disponibles, es decir:

$$E > I, \quad \text{o bien} \quad B < 2N - C$$

Algunos mecanismos de este tipo se representan en la figura 2.14.

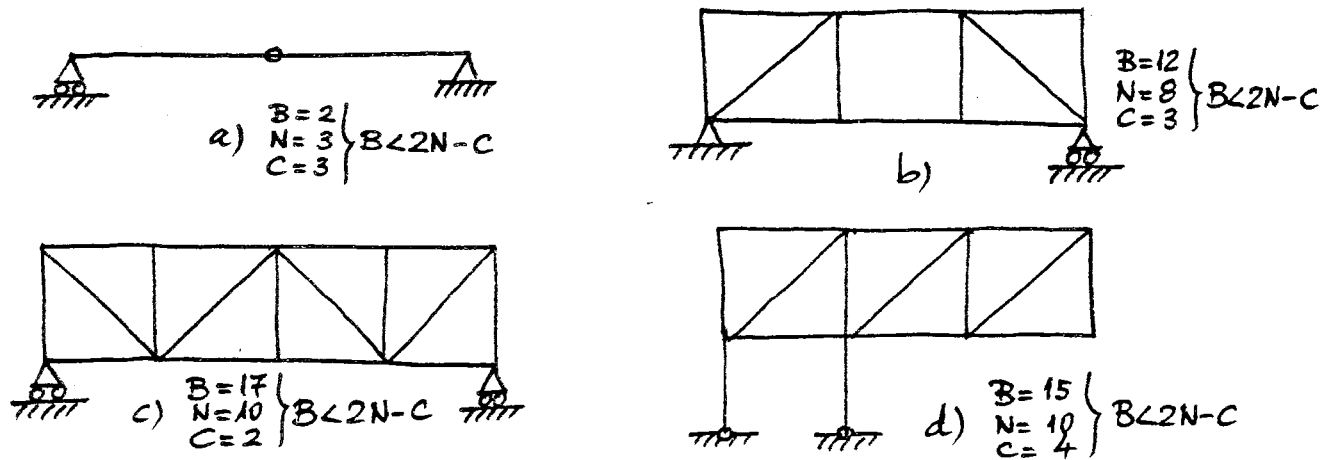


FIGURA 2.14.- Ejemplos de mecanismos.

Conviene señalar que existen mecanismos para los que se verifica $E \leq I$ y en los que para ciertos conjuntos de fuerzas no existe solución del sistema (2.3), mientras que para los restantes sistemas de fuerzas la estructura es hiperestática o isostática, es decir:

Para algunos vectores \underline{P} : $\text{rango}(\underline{F}) \neq \text{rango}(\underline{F}, \underline{P})$.

Para los restantes \underline{P} : $\text{rango}(\underline{F}) = \text{rango}(\underline{F}, \underline{P}) = r$, y $r = E$.

Mecanismos de este tipo se muestran en la figura 2.15.

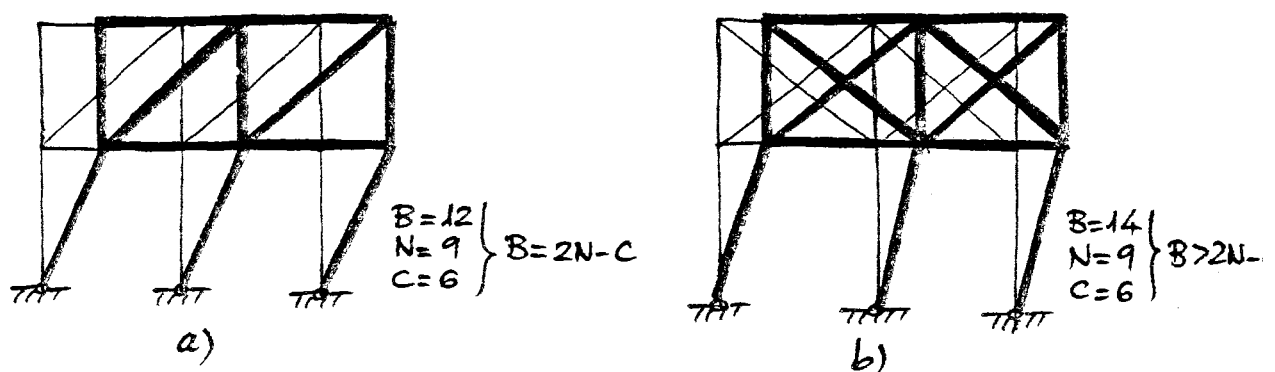


FIGURA 2.15.- Ejemplos de mecanismos.

Se comprueba que la condición $B < 2N - C$ es suficiente, pero no necesaria, para caracterizar a un mecanismo.

2.3.6. Resumen

A continuación se resumen los resultados de los apartados anteriores:

A.- Mecanismos

- a) Admiten grandes movimientos sin deformación.
- b) Existen conjuntos de cargas para los que no es posible hallar un sistema de esfuerzos en las barras en equilibrio con aquéllos, ni siquiera en la posición deformada de la estructura.
- c) Se cumplen las siguientes relaciones: $E > I$, es decir: $B < 2N-C$ o bien: $E \leq I$ o equivalentemente $B \geq 2N-C$, pero en este caso se verifica además, para un conjunto de cargas \underline{P} , la siguiente desigualdad:

$$\text{rango } (\underline{F}) \neq \text{rango } (\underline{F}, \underline{P}).$$

Para otras cargas \underline{P} , se cumple:

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P}) = E.$$

B.- Estructuras

- a) No admiten grandes movimientos sin deformación.
- b) Existe, para cada conjunto de cargas, al menos un sistema de esfuerzos que las equilibra en la posición deformada.
- c) Se verifican las relaciones siguientes:

$E \leq I$, y para todo conjunto de cargas definido en \underline{P} se cumple una de las dos posibilidades alternativas:

-Si $\text{rango } (\underline{F}) = E$, entonces para todo \underline{P} se cumple:

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P})$$

-Si $\text{rango } (\underline{F}) < E$, entonces existen cargas \underline{P} que satisfacen:

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P})$$

Las estructuras, a su vez, se pueden clasificar en los dos grupos siguientes:

B.1.- Estructuras críticas

- a) Admiten pequeños movimientos sin deformación.
- b) Existen conjuntos de cargas que no se equilibran con un sistema de esfuerzos dentro de la teoría lineal (pequeños movimientos).
- c) Se verifica:

$E \leq I$ y $\text{rango } (\underline{F}) = E$, o bien, existen algunos conjuntos de cargas \underline{P} que cumplen:

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P})$$

El grado crítico de una estructura es:

$$k = E - \text{rango } (\underline{F})$$

B.2.- Estructuras normales

- a) No admiten movimientos sin deformación.
- b) Para cada conjunto de cargas existe un sistema de esfuerzos que lo equilibra, dentro de la teoría lineal (pequeños movimientos).
- c) Se verifica:

$E \leq I$ y $\text{rango } (\underline{F}) = E$, o equivalentemente, para todo conjunto de cargas \underline{P} se cumple:

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P}) = E$$

Desde un punto de vista de cálculo, las estructuras normales se dividen, a su vez, en isostáticas e hiperestáticas (*).

(*) Desde un punto de vista teórico es posible considerar una división análoga de las estructuras críticas en isostáticas e hiperestáticas, pero su interés en el cálculo de estructuras civiles es limitado, por lo que no se incluye aquí, siendo suficientes los conceptos expuestos en los apartados 2.3.3 y 2.3.4.

B.2.1.- Isostáticas

- a) Cualquier conjunto de deformaciones es compatible.
- b) Las ecuaciones de la estática $\underline{F} \cdot \underline{X} = \underline{P}$ permiten determinar todos los esfuerzos.
- c) Se verifica $E = I$, es decir $B = 2N - C$, y para todo conjunto de cargas se satisface:

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P}) = E$$

B.2.2.- Hiperestáticas

- a) Existen conjuntos de deformaciones no compatibles.
- b) Las ecuaciones de la estática $\underline{F} \cdot \underline{X} = \underline{P}$ no permiten determinar unívocamente todos los esfuerzos, siendo preciso introducir las condiciones de compatibilidad.
- c) Se verifica $E < I$, es decir, $B > 2N - C$, y para todo conjunto de cargas se cumple:

$$\text{rango } (\underline{F}) = \text{rango } (\underline{F}, \underline{P}) = E$$

El grado de hiperestatismo es $\alpha = I - E$.

2.4. ESTRUCTURAS ESPACIALES

En el caso de celosías espaciales el número de incógnitas por cada barra es de seis y corresponden a las reacciones en sus nudos extremos (figura 2.16).

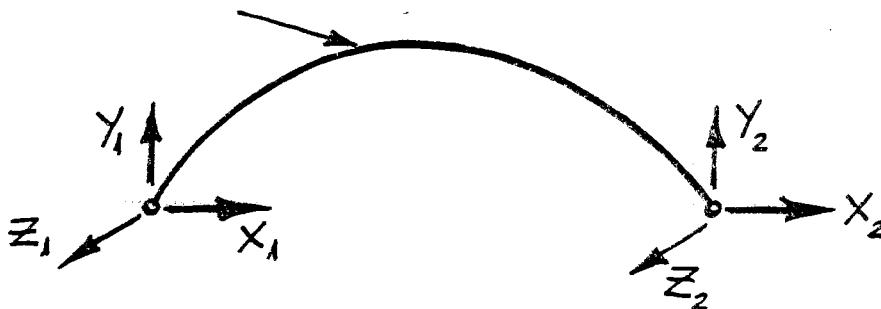


FIGURA 2.16.- Incógnitas en un elemento de celosía espacial.

Además, y al igual que en el caso de celosías planas, existe un número adicional C de incógnitas que corresponden a las coacciones en los apoyos. Por lo tanto, el número total de incógnitas es:

$$I = 6B + C$$

siendo B el número de barras de la celosía.

Las ecuaciones disponibles son:

-Equilibrio de cada barra: $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = \Sigma M_y = \Sigma M_z = 0$, es decir, equilibrio de fuerzas según los tres ejes coordenados y equilibrio de momentos según los ejes Y y Z . Conviene señalar que la ecuación $\Sigma M_x \equiv 0$ se satisface idénticamente ^(*).

-Equilibrio de cada nudo: $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$,

ya que las ecuaciones de equilibrio de momentos en el nudo son identidades, al constituir los nudos articulaciones perfectas.

Así pues, el número total de ecuaciones es:

$$E = 5B + 3N$$

si N es el número de nudos de la estructura.

Ahora, la condición necesaria (aunque no suficiente) para que la estructura no sea inestable se convierte en:

$$I \geq E \rightarrow B \geq 3N - C$$

El resto de la discusión, correspondiente a las clasificaciones de estas es tructuras (críticas, isostáticas, etc.) es similar a la desarrollada en los apartados anteriores para celosías planas.

(*) El eje x corresponde a la recta que une los nudos extremos de la barra.

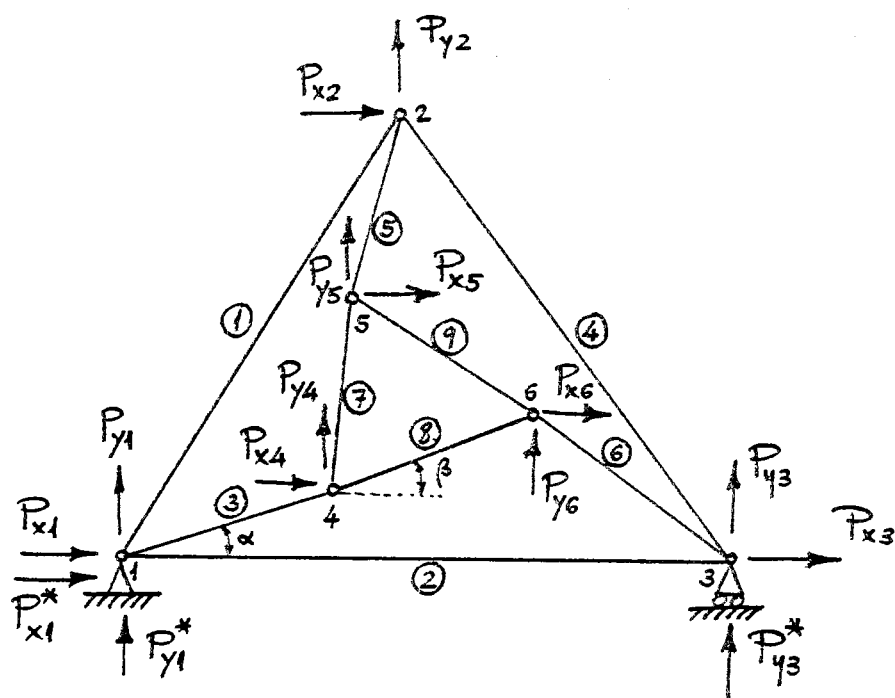


FIGURA 2.17.- Ejercicio 2.1.

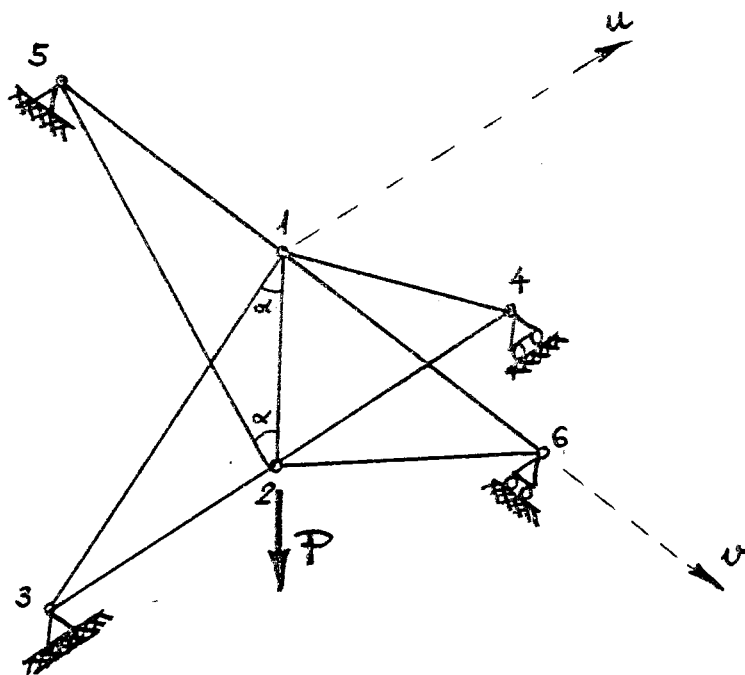


FIGURA 2.18.- Ejercicio 2.2.

2.5. EJERCICIOS PROPUESTOS. ENUNCIADOS

Ejercicio 2.1.

Analizar la estructura articulada representada en la figura 2.17, en función del valor del ángulo α .

Ejercicio 2.2.

Calcular los esfuerzos en las barras de la estructura representada en la figura 2.18, supuesto que para todas ellas se verifica:

$$\frac{L}{E\Omega} = K$$

Ejercicio 2.3.

Clasificar las estructuras articuladas siguientes (figura 2.19).

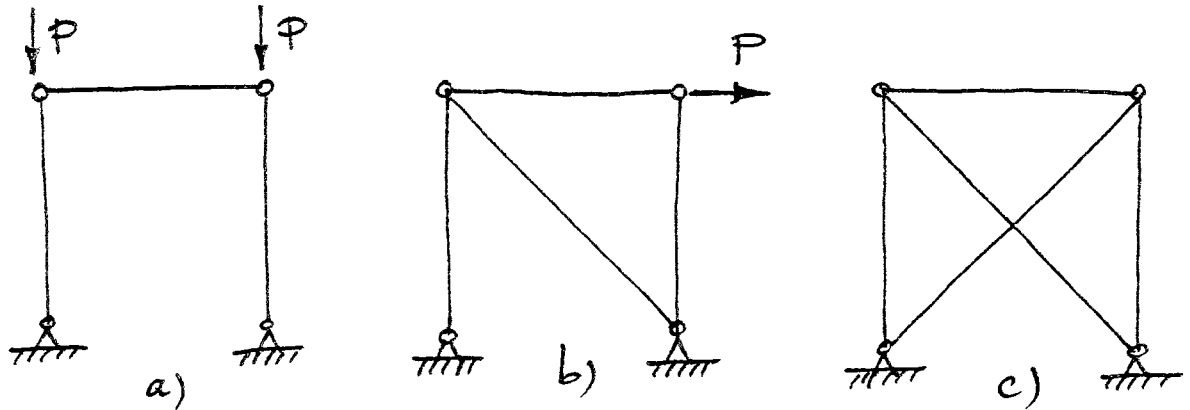


FIGURA 2.19.- Ejercicio 2.3.

Ejercicio 2.4.

Escribir las matrices \underline{F} y \underline{P} del texto, correspondientes a la estructura de la figura 2.20.

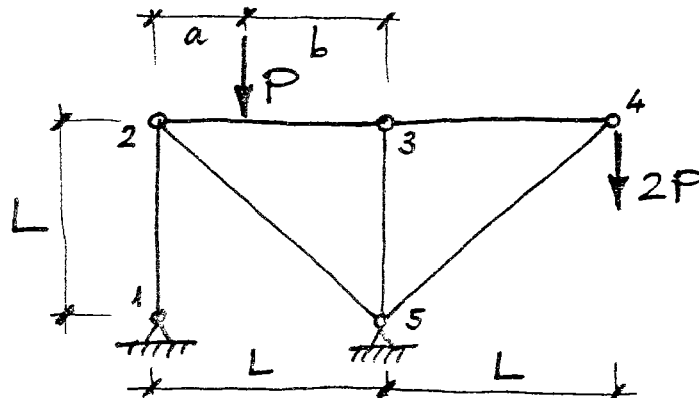


FIGURA 2.20.- Ejercicio 2.4.

Ejercicio 2.5.

Calcular las siguientes estructuras críticas (figura 2.21).

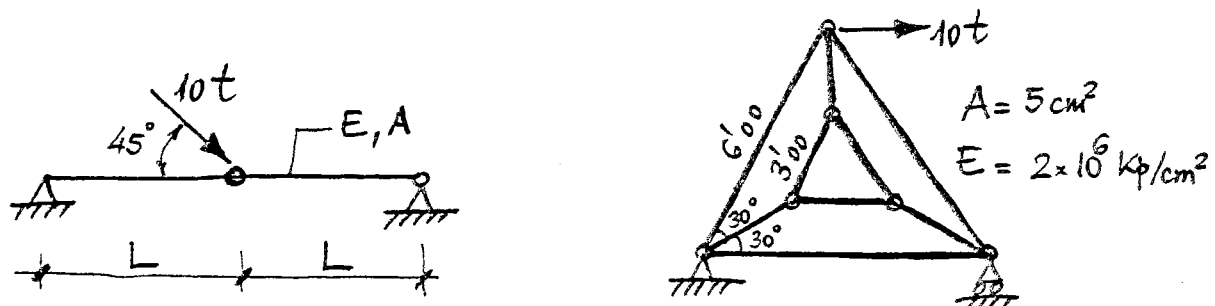


FIGURA 2.21.- Ejercicio 2.5.

Ejercicio 2.6.

Clasificar las estructuras representadas en la figura 2.22.

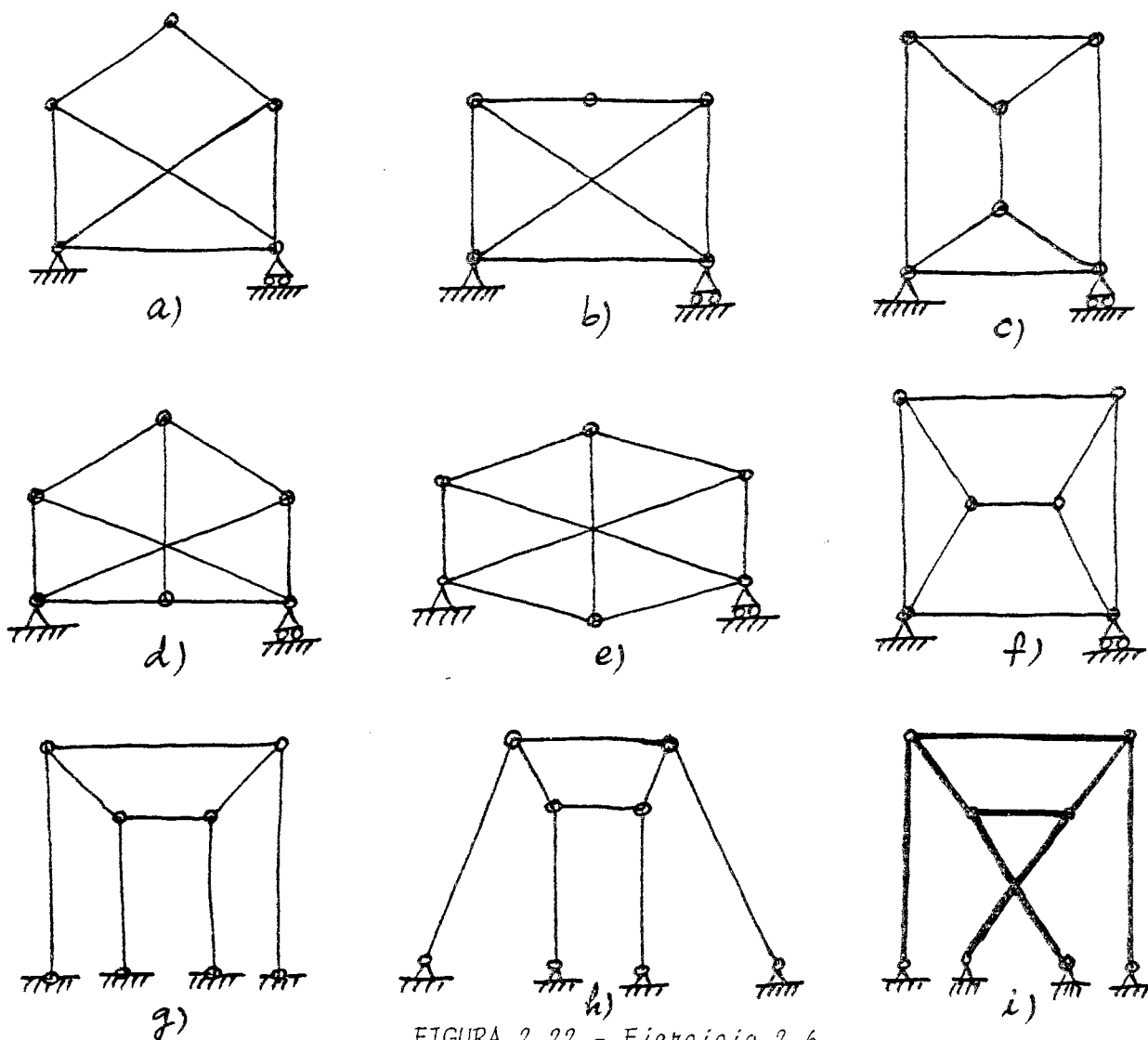


FIGURA 2.22.- Ejercicio 2.6.

Ejercicio 2.7.

Comprobar que en una estructura crítica de género k existen k estados de es fuerzas linealmente independientes que están en autoequilibrio, es decir, las fuerzas exteriores sobre la estructura son nulas. Significado matemático.

2.6. EJERCICIOS PROPUESTOS. SOLUCIONESEjercicio 2.1.

$$B = 9; N = 6; C = 3; \quad \text{por lo tanto:} \quad B = 2N - C$$

Así pues, se trata de una estructura isostática, que puede ser crítica para ciertos valores del ángulo α .

Si se plantean en cada nudo las dos ecuaciones de equilibrio (de fuerzas ho rizontales y verticales), se obtiene el sistema final de ecuaciones:

$$\underline{F} \cdot \underline{X} = \underline{P}$$

siendo \underline{F} una matriz cuadrada de 12×12 .

El determinante de dicha matriz es:

$$|\underline{F}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \beta - \alpha\right) \sin(\alpha + \beta) + \sin^3(\beta - \alpha) \right\}$$

en donde α y β están relacionados geométricamente, según se muestra en la figu ra 2.17.

Si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ y $\beta = 0$, se obtiene $|\underline{F}| = 0$; el rango de \underline{F} es 11 y la estructura es crítica.

En ese caso el sistema de esfuerzos en autoequilibrio es idéntico al que se indica en la figura 2.13-c y el movimiento infinitesimal de sólido rígido que se puede introducir en la estructura sin producir deformaciones en las barras queda reflejado en la figura 2.13-b.

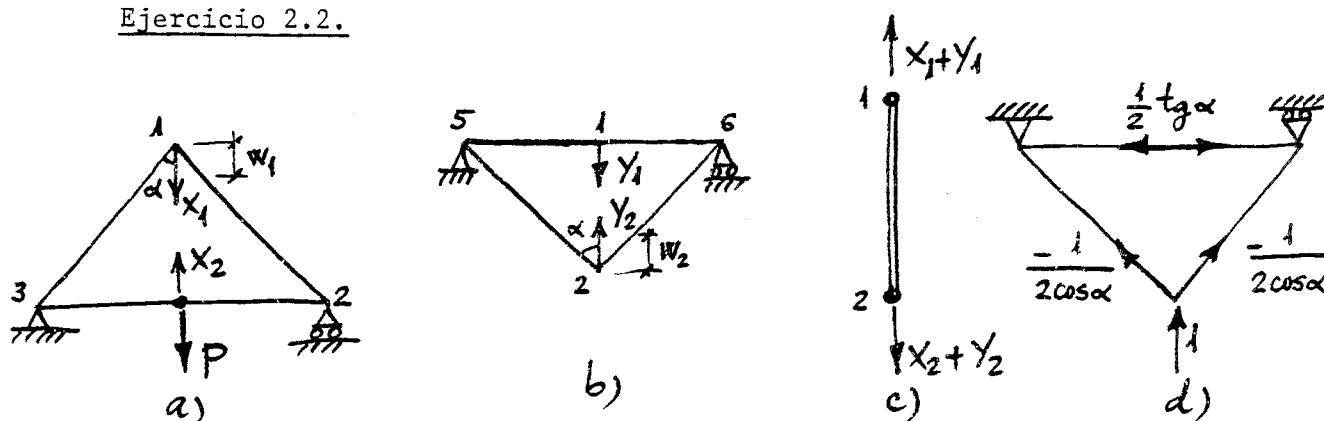
Ejercicio 2.2.

FIGURA 2.23.- Ejercicio 2.2. Solución.

Se consideran las subestructuras representadas en las figuras 2.19-a, b y c, respectivamente.

El equilibrio de la barra 1-2 conduce a las igualdades:

$$X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2 = N$$

y el equilibrio de los nudos 2 y 1 en las subestructuras a) y b), respectivamente, obliga a que se verifique:

$$X_2 = P \quad ; \quad Y_1 = 0$$

Así pues:

$$X_1 = N \quad ; \quad X_2 = P \quad ; \quad Y_1 = 0 \quad ; \quad Y_2 = N - P$$

El cálculo de los movimientos de los nudos 1 y 2 (estructuras a y b) proporciona los resultados:

$$w_1 = \frac{1}{4} \frac{2 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} X_1 \frac{L}{E\Omega} \quad ; \quad w_2 = \frac{1}{4} \frac{2 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} Y_2 \frac{L}{E\Omega}$$

Por lo tanto:

$$w_1 + w_2 = \frac{1}{4} \frac{2 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} (X_1 + Y_2) \frac{L}{E\Omega}$$

que debe ser igual al acortamiento de la barra 1-2 (figura 2.19-c), es decir:

$$\frac{1}{4} \frac{2+\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} (X_1 + Y_2) \frac{L}{E\Omega} = -N \frac{L}{E\Omega}$$

$$\text{o sea: } \frac{1}{4} \frac{2+\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} (N+N-P) = -N; \quad N = \frac{2+\sin^2 \alpha}{2(3+\cos^2 \alpha)} P$$

Así pues, resultan los siguientes esfuerzos:

$$N_{12} = \frac{2+\sin^2 \alpha}{2(3+\cos^2 \alpha)} P ; \quad N_{13} = - \frac{2+\sin^2 \alpha}{4\cos \alpha (3+\cos^2 \alpha)} P = N_{14};$$

$$N_{25} = - \frac{2+3\cos^2 \alpha}{4\cos \alpha (3+\cos^2 \alpha)} P = N_{26}$$

CAPITULO 3.- ESTRUCTURAS ARTICULADAS ISOSTATICAS . DETERMINACION DE ESFUERZOS

3.1. INTRODUCCION

Por la propia definición de isostatismo, los esfuerzos en las barras de una estructura isostática pueden ser obtenidos mediante la utilización únicamente de las ecuaciones de equilibrio. No es necesario, por lo tanto, recurrir ni a las ecuaciones constitutivas de cada barra ni a las de compatibilidad.

De un modo paralelo, si se conocen las deformaciones de las barras de la estructura, es posible obtener los movimientos de todos sus nudos mediante las ecuaciones de compatibilidad sin necesidad de recurrir a las de equilibrio, tal como se verá en un capítulo posterior.

Por otra parte, el sistema de esfuerzos que equilibran a un conjunto arbitrario de acciones es único. Esto implica que si estas acciones son fuerzas exteriores nulas y sólo existen deformaciones iniciales impuestas en la estructura, ésta se mueve (sus nudos se desplazan), pero no aparecen esfuerzos en las barras.

Por lo tanto, es posible calcular los esfuerzos de una estructura articulada isostática mediante el sistema de ecuaciones de equilibrio:

$$\underline{F} \cdot \underline{X} = \underline{P} \quad (3.1)$$

tal como se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.

Determinar analíticamente las reacciones y los esfuerzos en todas las barras de la estructura articulada isostática representada en la figura 3.1.

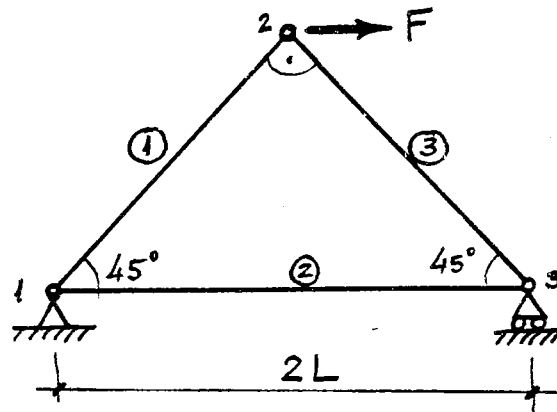


Fig. 3.1. Ejemplo 3.1.

SOLUCION:

Las reacciones de los nudos sobre las barras pueden reducirse en este caso (al no existir cargas aplicadas sobre ellas) a una única, que representa el esfuerzo. Se define mediante N_i este esfuerzo en la barra i (tracciones positivas). X_i e Y_i indican, respectivamente, las reacciones de apoyo horizontal y vertical en el nudo i , adoptándose como sentidos positivos de izquierda a derecha para las reacciones horizontales y de abajo arriba para las verticales.

Si se plantean las ecuaciones de equilibrio en cada nudo, se obtiene:

-Equilibrio del nudo 1:

$$N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 + X_1 = 0$$

$$N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_1 = 0$$

-Equilibrio del nudo 2:

$$-N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = -F$$

$$N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

-Equilibrio del nudo 3:

$$-N_2 - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_3 = 0$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ X_1 \\ Y_1 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es, para este caso particular, el sistema (3.1).

Una vez resuelto el sistema anterior, se deduce:

$$N_1 = \frac{F}{\sqrt{2}}; \quad N_2 = \frac{F}{2}; \quad N_3 = -\frac{F}{\sqrt{2}}; \quad X_1 = -F; \quad Y_1 = -\frac{F}{2}; \quad Y_3 = \frac{F}{2}$$

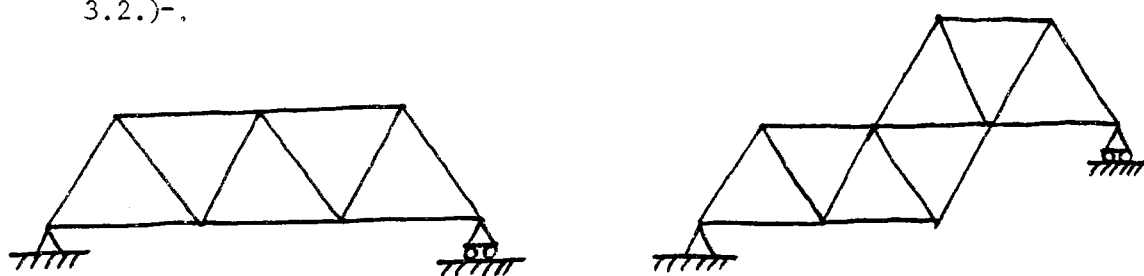
En la práctica, sin embargo, se suele resolver el sistema de ecuaciones lineales (3.1) mediante artificios numéricos o gráficos -que tienen en cuenta la forma de la estructura-, a fin de simplificar la obtención de los esfuerzos.

En los apartados siguientes se exponen algunas de estas técnicas de cálculo convencional de estructuras articuladas isostáticas.

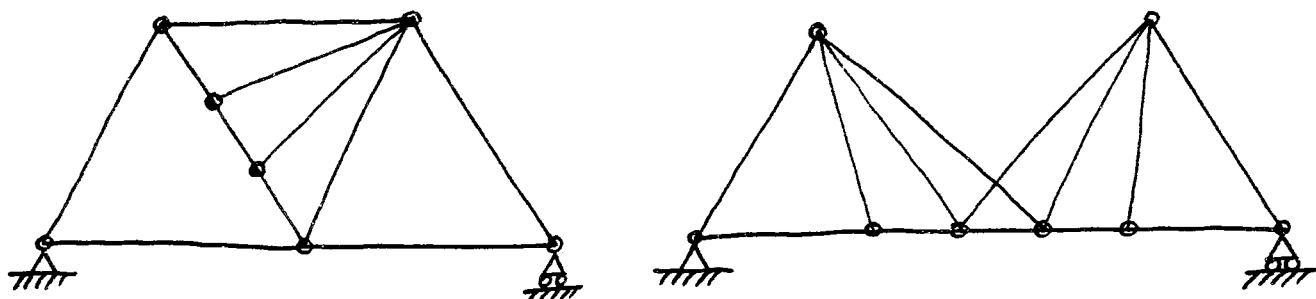
3.2. METODO GRAFICO DE CREMONA

Este método se debe a L. Cremona, profesor del Instituto Politécnico de Milán, y fue publicado en 1872 en su famoso libro "Le figure reciproche nella statica grafica".

El método permite obtener gráficamente, de un modo sencillo y automático, los esfuerzos en las barras de una estructura articulada isostática con cargas actuando únicamente en sus nudos. Su aplicación más simple tiene lugar en un determinado tipo de estructuras, de frecuente utilización práctica, denominadas canónicas. Una celosía formada por triángulos adosados uno a continuación del otro, de tal forma que un lado es común, a lo sumo, a dos triángulos y, asimismo, cada triángulo es adyacente, a lo sumo, a otros dos, se conoce con el nombre de canónica (fig. 3.2.)-.



a) canónicas



b) no canónicas

Fig. 3.2. Estructuras articuladas canónicas y no canónicas.

El procedimiento de cálculo exige conocer previamente todas las fuerzas actuantes; en particular, las reacciones. Puesto que la estructura es isostática, éstas pueden obtenerse mediante las ecuaciones de equilibrio. Concretamente, si la sustentación es isostática (3 coacciones), son suficientes las tres condiciones de equilibrio general de la estructura plana: dos ecuaciones de anulación de las fuerzas según dos direcciones y otra de nulidad de momentos respecto a un punto arbitrario. Por otra parte, si la sustentación es hiperestática, es preciso que internamente la estructura sea un mecanismo, a fin de que globalmente sea isostática. Ello permite el planteamiento de ecuaciones de equilibrio adicionales.

Ejemplo 3.2.

En la figura 3.3 se representan dos estructuras isostáticas.

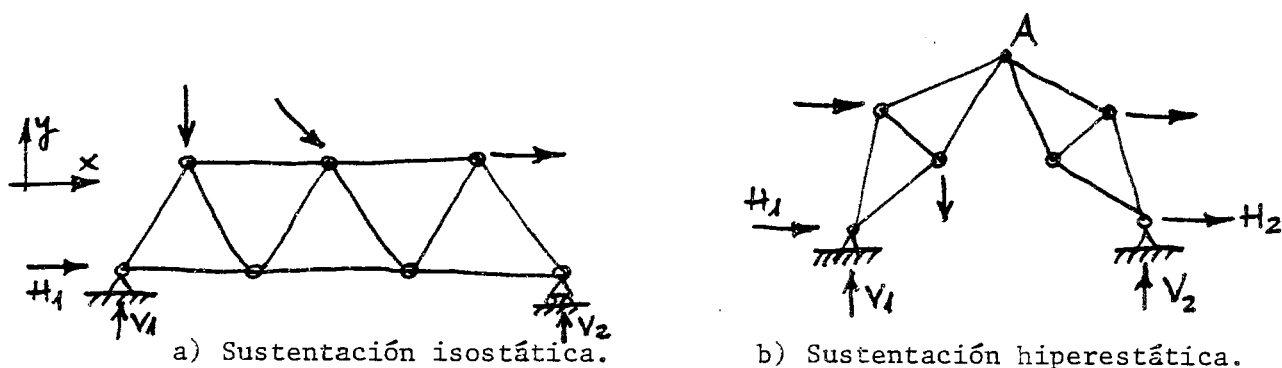


Fig. 3.3. Determinación de las reacciones.

Para la situación correspondiente a la figura 3.3-a la sustentación es isostática. En ese caso, las ecuaciones de equilibrio que permitan determinar las reacciones en los apoyos son las siguientes, referidas a los ejes (x, y) de la figura:

- Equilibrio de fuerzas horizontales: $\Sigma F_x = 0$
- Equilibrio de fuerzas verticales : $\Sigma F_y = 0$
- Equilibrio de momentos respecto a
un punto arbitrario : $\Sigma M = 0$

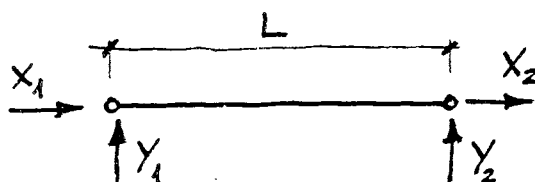
En el segundo caso (fig. 3.3-b) la sustentación es hiperestática (cuatro reacciones incógnitas), pero internamente la estructura es un mecanismo, lo que proporciona la ecuación de equilibrio adicional. Resultan, pues, las siguientes condiciones:

- Equilibrio de fuerzas horizontales: $\Sigma F_x = 0$
- Equilibrio de fuerzas verticales : $\Sigma F_y = 0$
- Equilibrio general de momentos : $\Sigma M = 0$
- Equilibrio de momentos, respecto a
la articulación A, de las fuerzas
dorsales o frontales : $\Sigma M_A = 0$

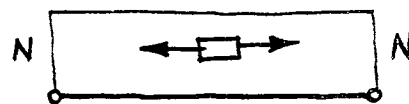
Las cuatro ecuaciones de equilibrio anteriores permiten obtener el valor de las cuatro incógnitas H_i, V_i ($i=1,2$).

Existe la posibilidad de determinar las reacciones mediante procedimientos de estática gráfica (utilización de polígonos de fuerzas y funiculares), si bien, en la actualidad, con las posibilidades de cálculo existentes, no suelen ser utilizados con frecuencia.

Como se ha supuesto que las cargas sobre la estructura actúan únicamente en los nudos, es posible reducir el número de acciones sobre extremos de barra, de cuatro, en la situación general, a una, que tiene el significado de un axil de valor constante a lo largo de aquélla. En efecto, de las ecuaciones de equilibrio de una barra (fig. 3.4), se deduce:



a) Acciones sobre una barra descargada.



b) Esfuerzo axil constante.

Fig. 3.4. Equilibrio de barras.

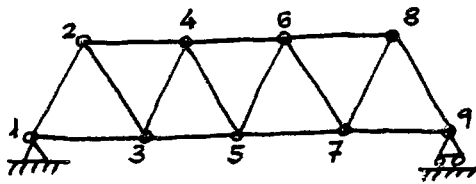
$$\left. \begin{array}{l} X_1 + X_2 = 0 \\ Y_1 + Y_2 = 0 \\ LY_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ es decir: } \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = Y_2 = 0 \\ -X_1 = X_2 = N \end{array} \right.$$

siendo N el valor constante de la tracción a que se encuentra sometida la barra.

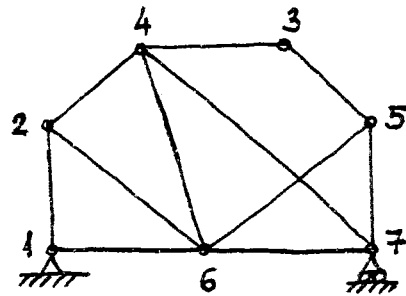
Una vez calculadas las reacciones en los apoyos de la estructura, bien analíticamente, bien mediante procedimientos gráficos, en la aplicación del método de Cremona se siguen los pasos que a continuación se indican:

1) Se numeran los nudos de la estructura (apoyos incluidos), comenzando por uno en el que sólo concurran dos barras cuyos esfuerzos se desconocen, siguiendo con otro, conectado con el anterior mediante una barra, que cumpla la misma condición, y así sucesivamente. Si la estructura es canónica

ca, dicha numeración podrá realizarse de forma correlativa a partir del primer nudo numerado. Esta situación puede no ser posible si la estructura es no canónica (fig. 3.5.).



a) Estructura canónica.



b) Estructura no canónica.

Fig. 3.5. Numeración de nudos. Método de Cremona.

2) Las fuerzas que actúan en los nudos de la estructura han de situarse externamente a la misma, mediante la traslación correspondiente, tal como se muestra en la figura 3.6.

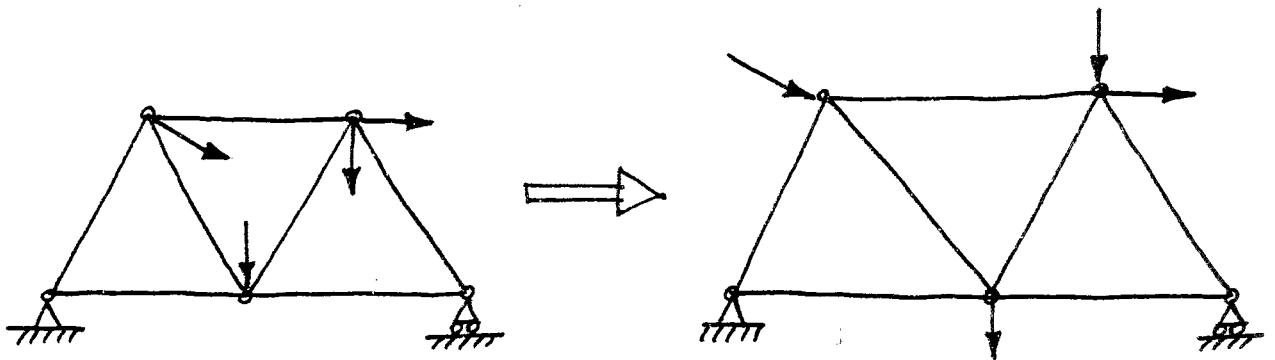


Fig. 3.6. Método de Cremona. Traslación de las cargas sobre nudos.

3) Se establece el equilibrio, de un modo ordenado, de los nudos de la estructura, para lo cual, en primer lugar, se elige en todos ellos un sentido único de giro; por ejemplo, antihorario.

A continuación, siguiendo la numeración de nudos anteriormente mencionada, se comienza por el primero de ellos, determinándose la resultante de todas las fuerzas conocidas que actúan sobre él, para lo cual se suman vectorialmente, dibujando una a continuación de otra, de acuerdo con el sentido de giro adoptado, dejando en último lugar las dos barras incógnitas.

La resultante así obtenida se descompone según las direcciones de las dos barras cuyos esfuerzos se desconocen, de tal modo que por el extremo de la resultante se traza una paralela a la dirección de la primera barra que se encuentra al seguir el sentido de giro elegido, y por el origen una paralela a la dirección de la segunda barra. La descomposición (no equilibrio) de la fuerza resultante se efectúa de forma inmediata en ambas direcciones.

Al haberse planteado una equivalencia estática y no equilibrio, las dos fuerzas de este modo deducidas corresponden a las acciones del nudo sobre cada una de las barras cuyos esfuerzos se desconocían, y que, por brevedad, se denominarán barras incógnitas.

Cada una de estas fuerzas puede utilizarse directamente (sin invertir su sentido), por lo tanto, como una fuerza exterior en el análisis estático del nudo siguiente, unido al que se estudia por una barra incógnita (fig. 3.7)

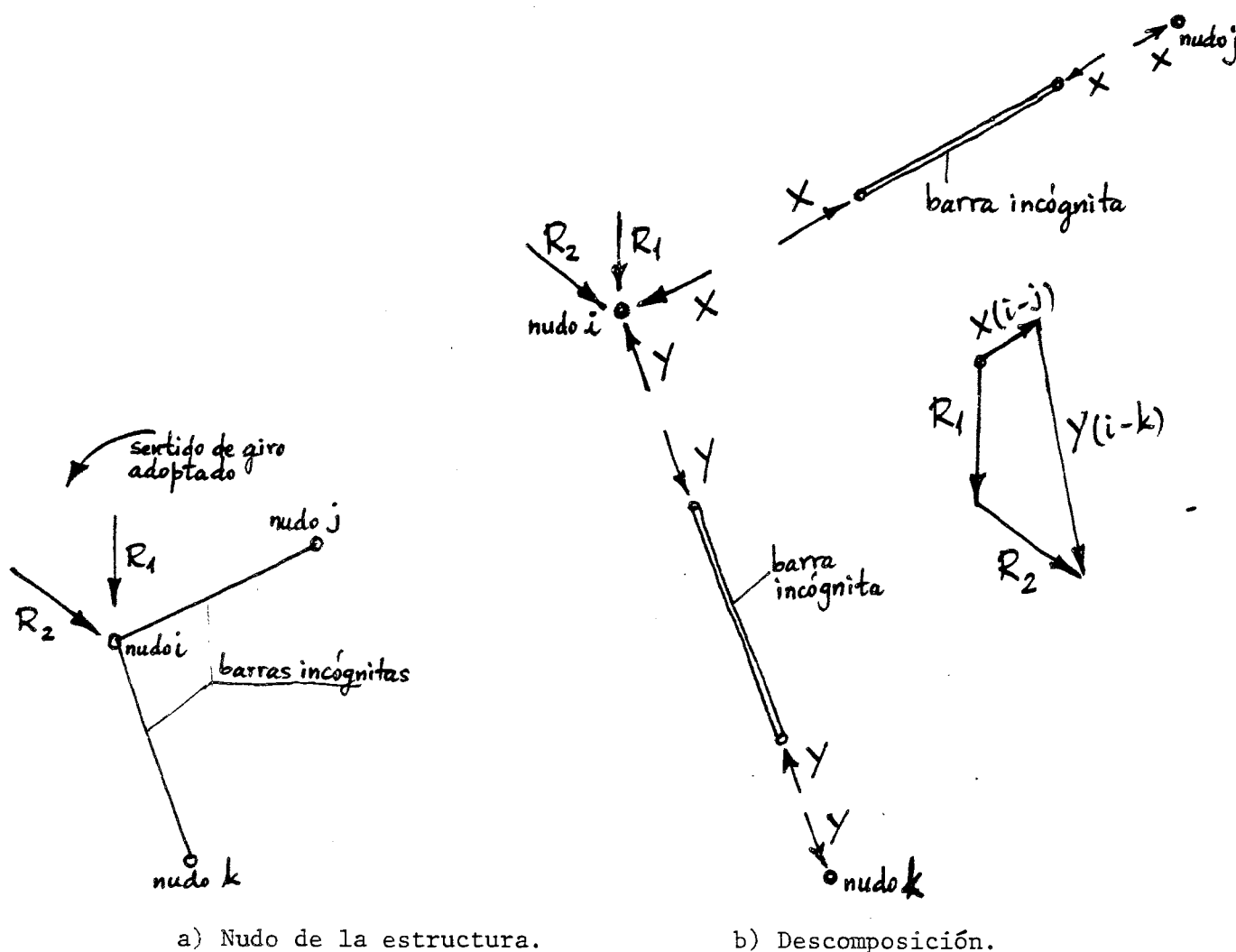


Fig. 3.7. Método de Cremona. Estática en el nudo.

4) El proceso efectuado para el nudo 1 se repite sucesivamente para los siguientes $(2, 3, \dots, N)$, hasta finalizar todos los nudos de la estructura.

Conviene señalar que, por la forma de numeración de la estructura canónica, este proceso siempre es factible, ya que en cada nudo existen, a lo sumo, dos barras incógnitas, lo que permite la descomposición estática de la resultante de las fuerzas que actúan en él.

La consideración de equivalencia, en lugar de equilibrio de fuerzas en el nudo, permite utilizar los esfuerzos en las barras, ya calculados, como acciones exteriores en los nudos subsiguientes, en los que intervienen, por lo tanto, de forma directa en el análisis estático.

Se comprueba, por consiguiente, que si se procede de un modo ordenado, tal como se acaba de describir, no es preciso repetir el dibujo de ninguna fuerza, lo cual simplifica notablemente la construcción del diagrama de Cremona. Por el contrario, en estructuras no canónicas (fig. 3.5-b), esta ventaja en el dibujo no puede ser asegurada.

5) Si se consideran positivos los esfuerzos de tracción y negativas las compresiones, se puede establecer la siguiente regla: Si la resultante actuando en un nudo i de la estructura se descompone en las dos direcciones incógnitas, y la fuerza equivalente en la dirección de la barra $i-j$ (j es el otro nudo de la barra) es tal que coincide con el sentido $i-j$, el es fuerzo es de compresión, y de tracción en caso contrario ^(*). Conviene observar que siempre $i < j$, debido a la numeración considerada en la estructura.

Normalmente es conveniente destacar las barras de una estructura que se encuentran comprimidas, bien mediante diferente color (rojo), bien regruesando la línea. La razón de esta costumbre reside en el hecho de que dichas barras son susceptibles de pandear, fenómeno que limita muchas veces su tensión admisible de trabajo.

NOTA(*): Esta regla se deduce inmediatamente si se observa que la fuerza de la barra $i-j$ corresponde a la acción del nudo i sobre el nudo j .

Ejemplo 3.3.

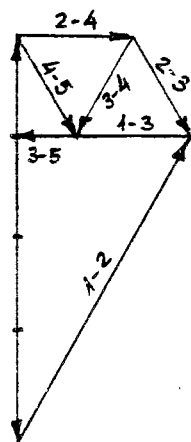
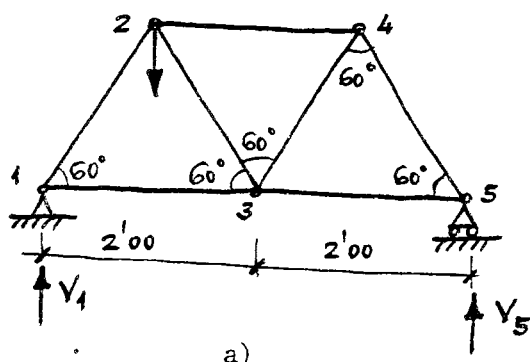
Calcular, mediante el método de Cremona, los esfuerzos en las barras de la estructura representada en la figura 3.8-a.

SOLUCION:

Para hallar las reacciones, se toman momentos respecto al nudo 1.

$$1 \cdot 1 = V_5 \cdot 4 ; \quad V_5 = \frac{1}{4}$$

$$V_1 + V_5 = 1 ; \quad V_1 = \frac{3}{4}$$



b) Cremona.

Barra	Esfuerzo (toneladas)
1-2	-0.93
1-3	0.45
2-3	-0.30
2-4	-0.33
3-4	0.30
3-5	0.25
4-5	-0.30

(+) : tracción
(-) : compresión

c) Cuadro de esfuerzos.

Fig. 3.8. Ejemplo de realización del método gráfico de Cremona.-

Es preciso señalar que en el último nudo de una estructura son conocidos todos los esfuerzos en las barras que en él concurren, así como las fuerzas actuantes, por lo que debe producirse el equilibrio (cierre del polígono de fuerzas). A veces, debido a los errores inherentes al dibujo, este cierre no se produce, pero el vector error permite medir la aproximación alcanzada con el método.

En una celosía existen, en ocasiones, barras para las que se sabe de antemano que su esfuerzo es nulo y pueden, por lo tanto, ser suprimidas en el cálculo de esfuerzos, simplificando el método gráfico de Cremona. Estas situaciones ocurren, por ejemplo, cuando tres barras concurren en un nudo sin carga, y dos de ellas están en prolongación. La figura 3.9. ilustra algunos ejemplos.

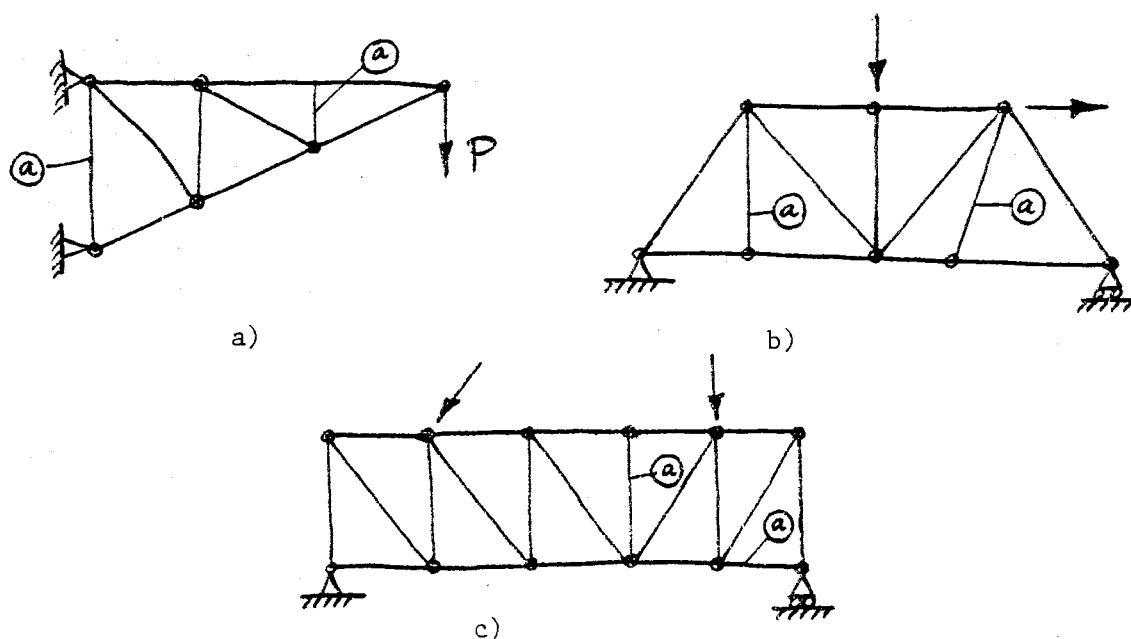


Fig. 3.9. Barras con esfuerzo nulo.

No obstante, conviene tener presente que a pesar de que estas barras no trabajen deben ser incluidas en un adecuado proyecto de la estructura, ya que, de otra forma, ésta se convertiría en un mecanismo inaceptable (*).

Por último, es interesante conocer previamente el orden de magnitud de los esfuerzos máximos susceptibles de aparecer en la estructura, con objeto de seleccionar una escala adecuada para la representación de las fuerzas en la construcción gráfica.

NOTA(*): Este mecanismo estaría en equilibrio bajo las acciones consideradas, pero cualquier modificación de éstas, o la consideración de la estructura deformada, destruirían el equilibrio precario (inestable).

En el método de Cremona también es posible proceder de un modo analítico, en lugar de gráfico. La principal ventaja que ello supone radica en la posibilidad de programación en una calculadora de bolsillo. Las fórmulas fundamentales a utilizar para la descomposición de fuerzas en un nudo genérico n son inmediatas. Los datos son:

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$: ángulos, respecto al eje x , de las barras con esfuerzos conocidos (N_1, N_2, \dots, N_m), y uno de cuyos extremos es coincidente con el nudo n .

X_n, Y_n : fuerzas exteriores aplicadas al nudo n .

β_1, β_2 : ángulos, respecto al eje x , de las dos barras incógnitas del nudo n .

Todos los ángulos de las barras se miden desde el eje $+x$ a la dirección de la barra, que une los nudos de menor a mayor numeración.

Los esfuerzos incógnitas son:

$$N_1 = \frac{\bar{X}_n \operatorname{sen} \alpha_2 - \bar{Y}_n \operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)} ; \quad N_2 = \frac{-\bar{X}_n \operatorname{sen} \alpha_1 + \bar{Y}_n \operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

siendo:

$$\bar{X}_n = X_n + \sum_{i=1}^m N_i \cos \alpha_i ; \quad \bar{Y}_n = Y_n + \sum_{i=1}^m N_i \operatorname{sen} \alpha_i$$

con $N_i > 0$ compresión y $N_i < 0$ tracción.

3.3. OTROS METODOS DE CALCULO DE ESFUERZOS

3.3.1. Generalización del método gráfico de Cremona

Si la estructura no es canónica, el método de Cremona puede utilizarse supuesto que sea posible numerar los nudos de acuerdo con los criterios antes expuestos. Es el caso de la estructura representada en la figura 3.10.

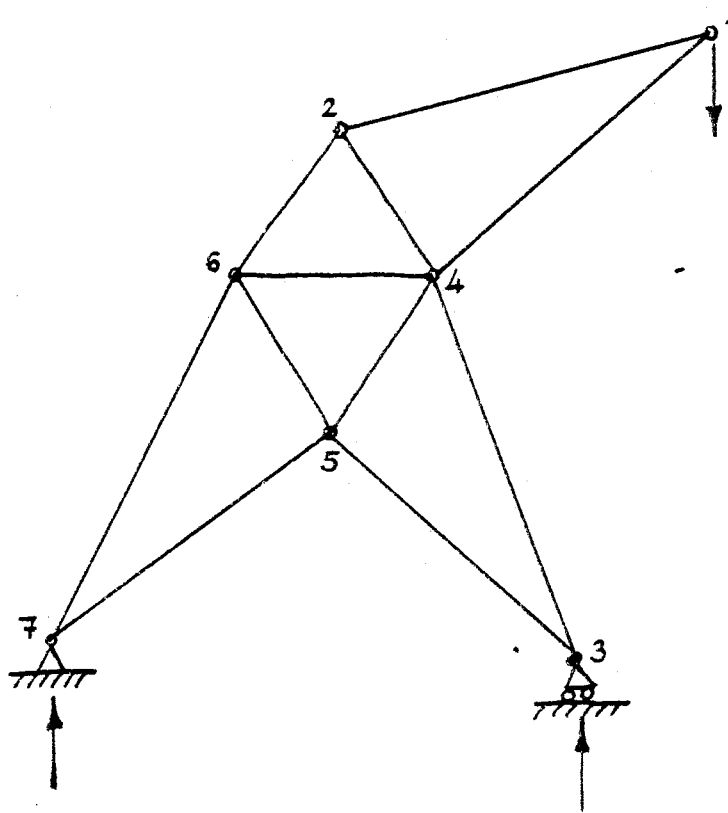


Fig. 3.10. Estructura triangulada no canónica.

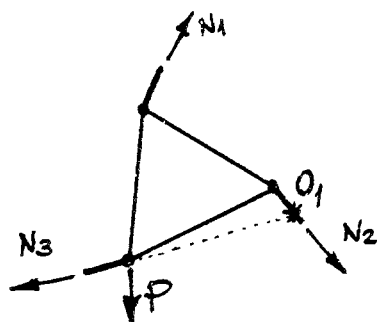
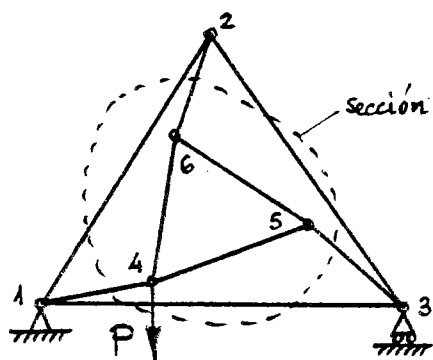
Frecuentemente este hecho exige la repetición de alguna fuerza o esfuerzo en el dibujo.

3.3.2. Método de las secciones

A veces ocurre que en una estructura no es posible numerar sus nudos de modo que únicamente existan en cada uno de ellos dos barras con esfuerzos desconocidos. La figura 3.11 muestra dos estructuras de este tipo.

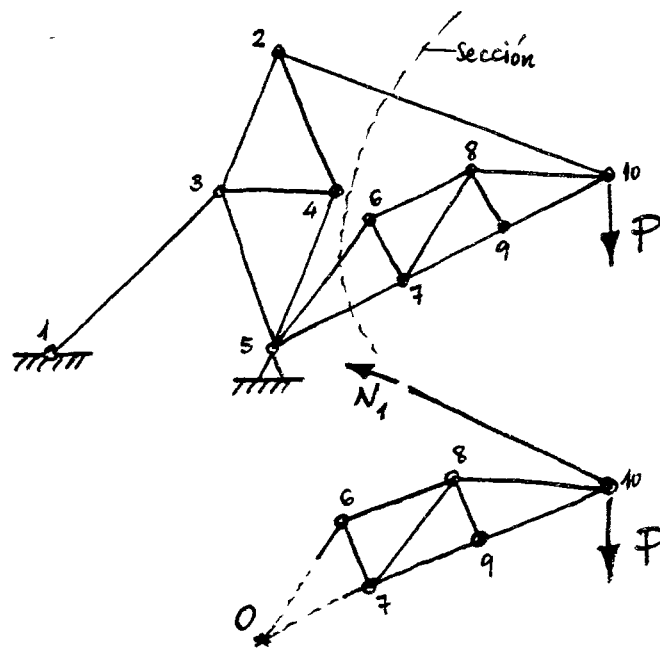
En estas situaciones, mediante una sección, se puede dividir la estructura en dos partes, y para una de ellas establecer el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre la misma junto con los esfuerzos en las barras cortadas por la sección. Si el número de barras seccionadas es de tres, con direcciones no concurrentes, es posible determinar sus esfuerzos, ya que se dispone de las tres ecuaciones de equilibrio que proporciona la estática (nulidad de fuerzas según dos direcciones y anulación de momentos respecto a un punto). Incluso si el número de barras es mayor,

pero todas ellas, excepto una, presentan direcciones concurrentes en un punto O , sigue siendo posible la determinación del esfuerzo en una barra, mediante el establecimiento del equilibrio de momentos, respecto al punto O , de todas las fuerzas y esfuerzos de las barras cortadas por la sección.



$$\sum M_{O_1} = 0 \rightarrow \text{Se calcula } N_i (i=1,2,3)$$

Caso (a)



$$\sum M_O = 0 \rightarrow \text{Se deduce } N_1$$

Caso (b) (*)

Fig. 3.11. Método de las secciones.

Una vez determinado el esfuerzo en una de las barras cortadas por la mencionada sección, se procede a llevar a cabo el método de Cremona, ya que pueden ahora numerarse los nudos según el orden previsto en dicho método.

Este procedimiento de las secciones se aplica ocasionalmente incluso a estructuras susceptibles de ser calculadas con otras técnicas -estructuras canónicas, por ejemplo-, si el interés del cálculo se centra únicamente en conocer el valor del esfuerzo de una barra o de un número pequeño de ellas. En esos casos puede resultar más eficiente que el propio método

NOTA(*): Conviene observar que esta estructura es isostática externa e internamente, puesto que el apoyo fijo 1, desde el punto de vista de cálculo, representa sólo una coacción, ya que existe únicamente una barra incidente en él.

gráfico de Cremona, el cual exige, para su aplicación, la determinación de todos los esfuerzos de la estructura.

3.3.3. Método analítico

El método anterior puede aplicarse de un modo sistemático a estructuras que, por sus características (celosías tipo viga de sección constante o variable, y acciones constituidas únicamente por cargas verticales), presentan ciertas ventajas en su cálculo mediante este método, en comparación con otros.

Algunas estructuras de este tipo se representan en las figura 3.12-a y 3.12-f, y a ellas se refieren las consideraciones que siguen.

Los esfuerzos en todas las barras pueden obtenerse de un modo analítico sistemático como se indica a continuación.

En efecto, si se introducen secciones del tipo A-A (fig. 3.12-d), se pueden determinar los esfuerzos en los cordones superior e inferior, de acuerdo con las expresiones:

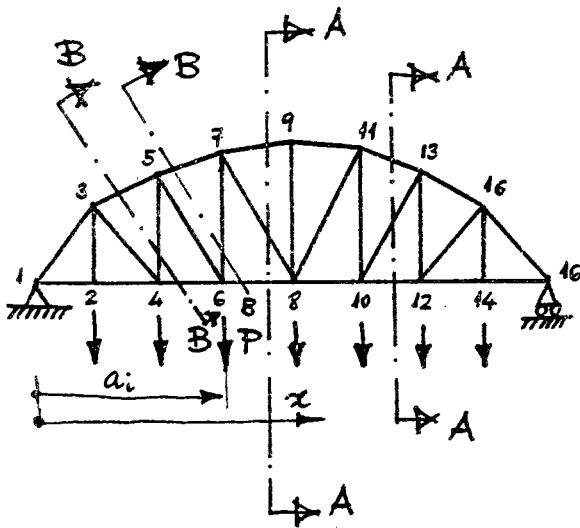
$$\text{Cordón superior } N_{7-9} = - \frac{M_8}{h_8} \quad (3.2)$$

$$\text{Cordón inferior } N_{6-8} = \frac{M_9}{h_9} \quad (3.3)$$

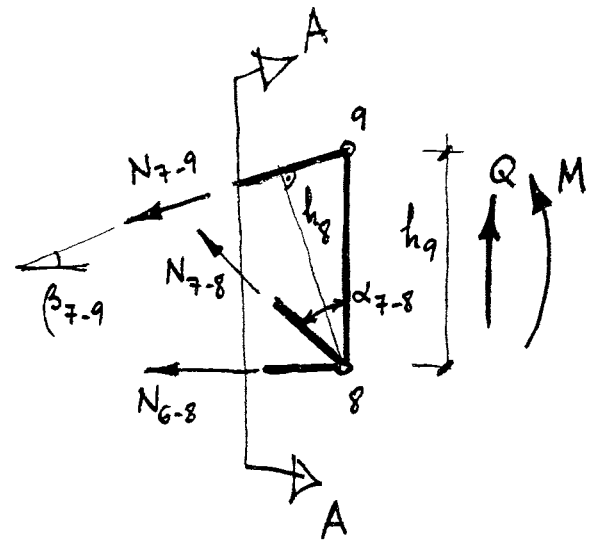
en donde M_8 (o M_9) representa el momento producido por todas las fuerzas exteriores (incluidas las reacciones) de la parte de la estructura frontal al nudo 8 (o 9). El sentido positivo del momento corresponde al antihorario, y el del esfuerzo axial a la tracción.

Si $Q_8 = Q_9$ corresponde a la suma de las fuerzas exteriores actuando en la parte de la estructura frontal a las secciones 8 y 9, el valor del esfuerzo en la diagonal es:

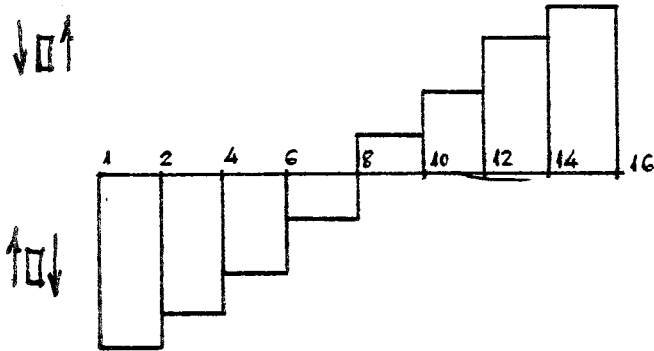
$$N_{7-8} = \frac{Q_8 + N_{7-9} \cos \beta_{7-9}}{\cos \alpha_{7-8}} \quad (3.4)$$



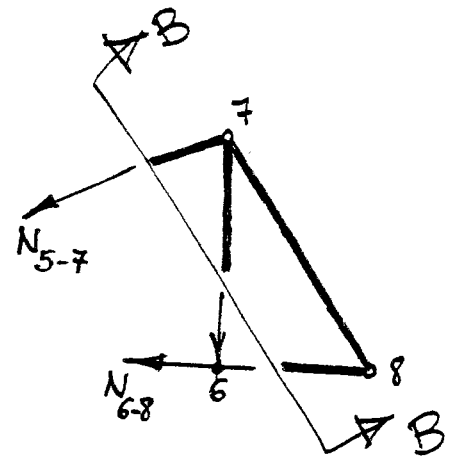
(a) Estructura general tipo viga



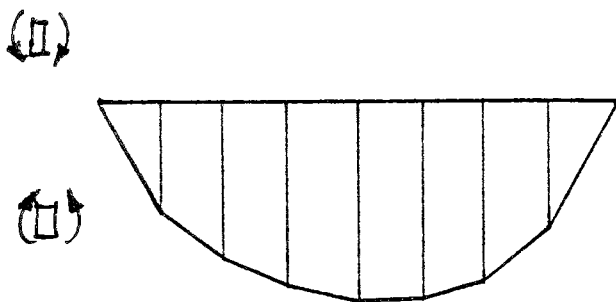
(d) Sección A-A



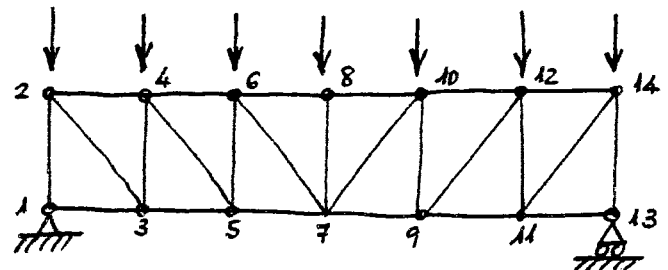
(b) Ley de esfuerzos cortantes



(e) Sección B-B



(c) Ley de momentos flectores



(f) Estructura de canto constante

Fig. 3.12. Método analítico.

Por último, las secciones B-B permiten determinar los esfuerzos en los montantes verticales de la estructura, como sigue:

$$Q_7 = N_{6-7} + N_{5-7} \operatorname{sen} \beta_{5-7} \quad (3.5)$$

En el caso de actuación de cargas verticales exclusivamente, los valores de M_I y Q_I corresponden a los momentos flectores y esfuerzos cortantes en la sección I de la viga recta horizontal de luz igual a la distancia entre apoyos. Las anteriores fórmulas (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) pueden presentarse en forma tabulada, lo que permite, de un modo cómodo, calcular los esfuerzos en todas las barras. La tabla 3.1 representa dichas fórmulas, correspondientes únicamente al caso de cargas verticales y canto constante, si bien la extensión a otras situaciones es posible. Evidentemente, si el canto de la estructura es constante (fig. 3.7-f), el cálculo (y la tabla) se simplifica de un modo notable.


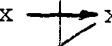




a	P	$\Sigma_f P$	a.P	$\Sigma_f aP$	$x \Sigma_f P$	M_x	h_i	Q_x	$Q_x / \cos \alpha$
x									
x									
x									
			ΣaP						

Tabla 3.1. Método analítico. Cálculo de esfuerzos.

El esfuerzo cortante en la sección x es: $Q_x = -\frac{\Sigma aP}{L} + \Sigma_f P$

El momento flector en la sección x es:

$$M_x = \Sigma_f (a-x)P - (L-x) \frac{\Sigma P a}{L} = \Sigma_f aP - x \Sigma_f P - \Sigma aP + \frac{x}{L} \Sigma aP$$

en donde $\Sigma_f X$ indica la suma de las cantidades X frontales a x.

Los esfuerzos son los siguientes: En las cabezas, $\pm M/h$; en las diagonales, $Q/\cos \alpha$, y en los montantes verticales, Q , siendo h y $\cos \alpha$ constantes.

Ejemplo 3.4.

Resolver, mediante el método analítico, la estructura articulada de la figura 3.13.

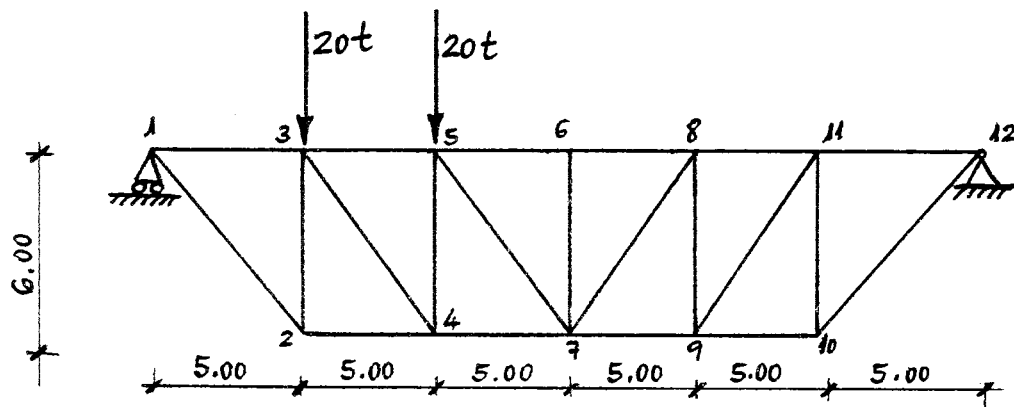


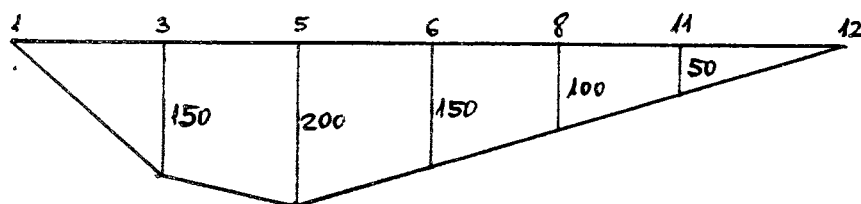
Fig. 3.13. Ejemplo 3.4.

SOLUCION:

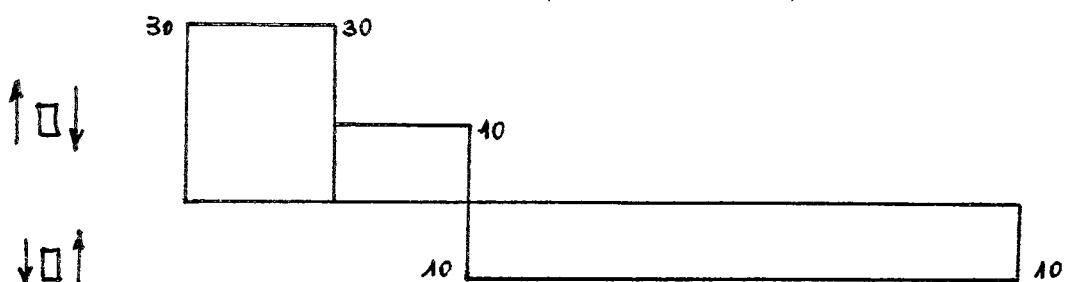
En la figura 3.14 se muestran las leyes de esfuerzos.

(II)

(I)



a) Momentos flectores ($m \times t$)



b) esfuerzos cortantes (t)

Fig. 3.14. Ejemplo 3.4. Leyes de esfuerzos.

El cálculo de esfuerzos se realiza con el auxilio de la tabla 3.2.

	(1)	(2)	(3)	(3)-(2).(1)		
NUDO	P_i	x_i	$x_i P_i$	$Q_x = \sum \frac{X_i P_i}{f}$	$\sum \frac{x_i P_i}{f}$	M_x
1	30.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2 y 3	-20.00	5.00	-100.00	-30.00	0.00	150.00
4 y 5	-20.00	10.00	-200.00	-10.00	100.00	200.00
6 y 7	0.00	15.00	0.00	10.00	300.00	150.00
8 y 9	0.00	20.00	0.00	10.00	300.00	100.00
10 y 11	0.00	25.00	0.00	10.00	300.00	50.00
12	10.00	30.00	300.00	10.00	300.00	0.00

Tabla 3.2.- Cálculo de esfuerzos.

Por último, y mediante la aplicación de las fórmulas (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5), se deducen los esfuerzos que se indican en la tabla 3.3.

BARRA	(mt) M_x	(m) h	(t) N	BARRA	(t) Q	$\text{sen}\alpha$	(t) N
1-3	150.00	-6.0	-25.0	1-2	-30.0	-0.768	39.1
2-4	150.00	-6.0	25.0	3-4	-10.0	-0.768	13.0
3-5	200.00	-6.0	-33.3	5-7	10.0	-0.768	-13.0
4-7	200.00	-6.0	33.3	7-8	10.0	0.768	13.0
5-6	150.00	-6.0	-25.0	9-11	10.0	0.768	13.0
6-8	150.00	-6.0	-25.0	10-12	10.0	0.768	13.0
7-9	100.00	-6.0	16.6				
8-11	100.00	-6.0	-16.6				
9-10	50.00	-6.0	8.3				
11-12	50.00	-6.0	-8.3				

BARRA	(t) Q	(t) N
2-3	-30.0	-30.0
4-5	-10.0	-10.0
6-7	0.0	0.0
8-9	10.0	10.0
10-11	10.0	10.0

Tabla 3.3.- Ejemplo 3.4. Esfuerzos.

3.3.4. Método de Henneberg o de cambio de barras

Constituye una técnica de cálculo de esfuerzos, de aplicación general. En efecto, permite transformar el cálculo de una estructura articulada no canónica en una serie de análisis de estructuras canónicas.

En esencia el método consiste en añadir a la estructura isostática (en general no canónica) una serie de barras. En la nueva estructura así obtenida (hiperestática), es posible suprimir un número de barras igual al de las añadidas, de modo que resulte otra estructura isostática, obviamente distinta a la de partida. Si se eligen las barras que se añaden y las que se eliminan de modo que esta nueva estructura isostática sea canónica, entonces se puede proceder como sigue (fig. 3.15):

a) Calcular los esfuerzos en todas las barras de la estructura isostática canónica (resultante del cambio de barras), debidos a las cargas exteriores actuantes. Sea N_i^0 el esfuerzo en la barra i producido en este estado (fig. 3.15-b).

b) Por cada una de las K barras suprimidas se aplican a la misma estructura isostática básica -canónica- dos fuerzas unidad (biacción), equivalentes al efecto que un esfuerzo unidad de la barra suprimida ejerce sobre la estructura. Sean estos esfuerzos en la barra i , N_i^k , correspondientes al estado k ($k=1,2,\dots,K$), es decir, a la k -sima barra suprimida (figs. 3.15-c y 3.15-d).

c) Los esfuerzos finales en la barra i de la estructura hiperestática (sin ninguna barra suprimida) son, evidentemente:

$$N_i = N_i^0 + \sum_{k=1}^K X^k N_i^k \quad (3.6)$$

en donde X^k corresponde al valor del esfuerzo de la k -sima barra suprimida, y su valor es desconocido en principio.

d) Los valores de las incógnitas X^k se obtienen mediante las K condiciones referentes al hecho de que el esfuerzo en las K barras añadidas es nulo, es decir:

$$N_j = 0 = N_j^0 + \sum_{k=1}^K X^k N_j^k \quad (3.7)$$

con $j = j_1, j_2, \dots, j_K$ (barras añadidas).

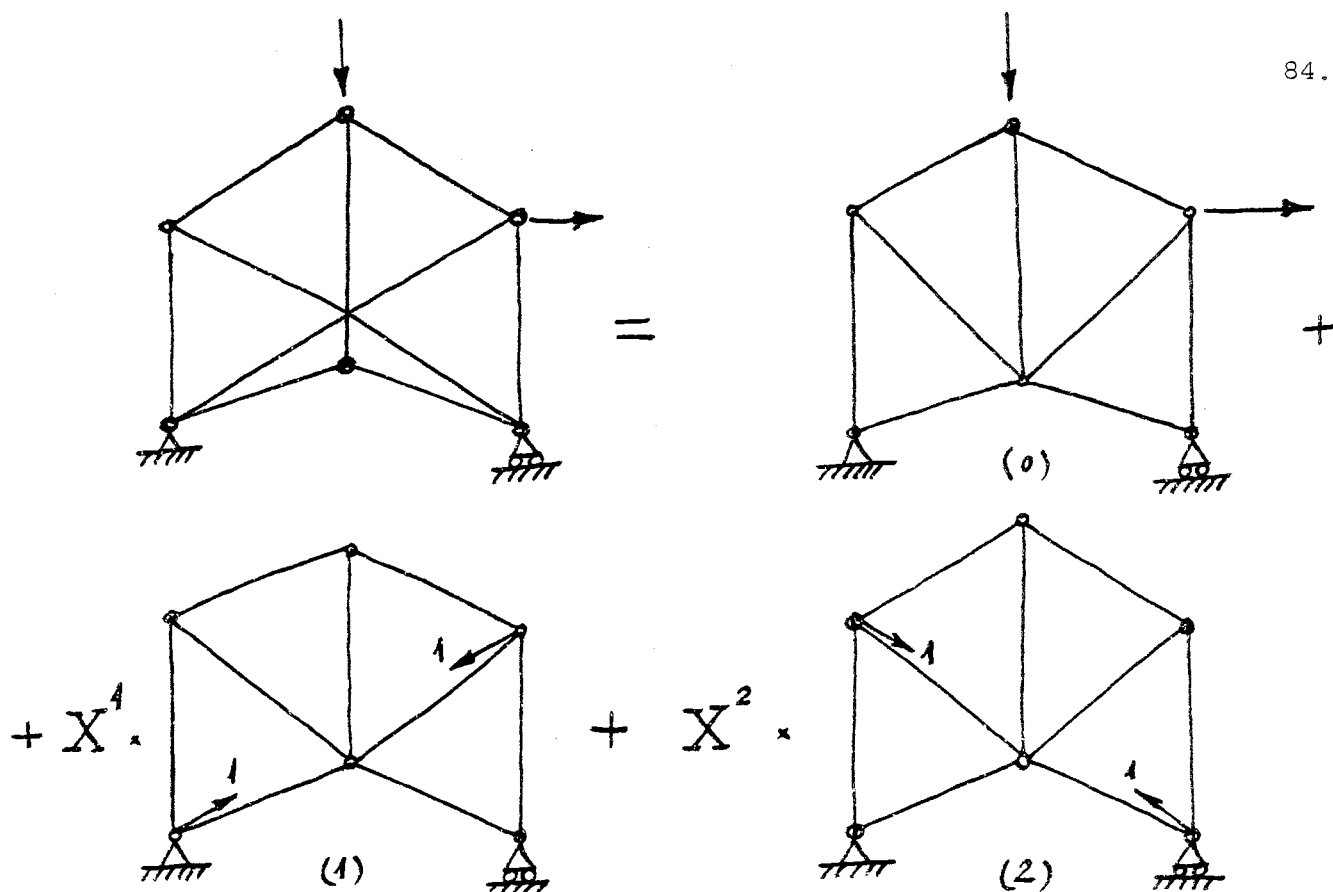


Fig. 3.15. Método de Henneberg.

El sistema de ecuaciones (3.7) siempre tiene solución única, supuesto que la estructura inicial es isostática y la estructura canónica final también lo sea.

Resuelto el sistema (3.7), se deducen los esfuerzos en todas las barras de la estructura final mediante las expresiones (3.6), esfuerzos que para las barras suprimidas corresponden directamente a las incógnitas X^k , es decir:

$$N_k = X^k \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

Ejemplo 3.5.

Obtener, mediante el procedimiento de Henneberg, los esfuerzos en las barras de la estructura que se muestra en la figura 3.16.

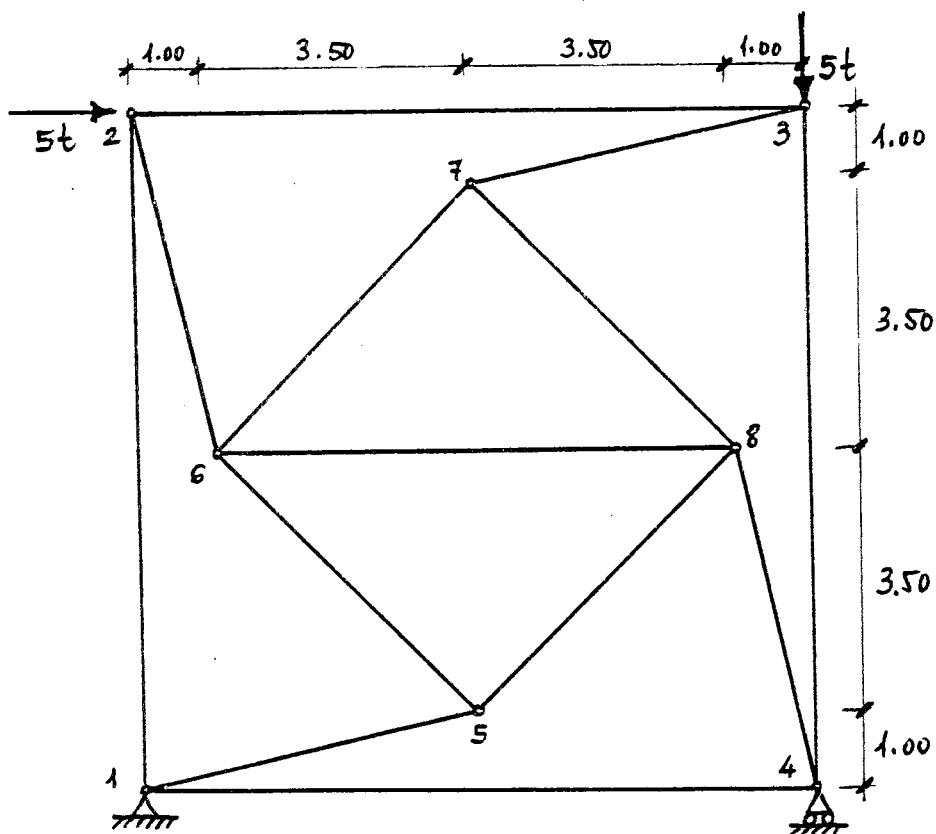


Fig. 3.16. Ejemplo 3.5.

SOLUCION:

La estructura isostática canónica derivada de la inicial, así como los estados auxiliares correspondientes a las diferentes biacciones unitarias aparecen reflejados en la figura 3.17.

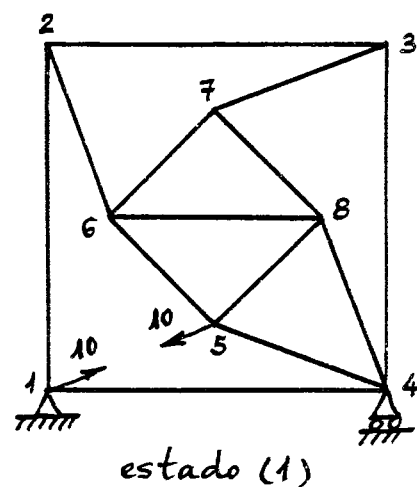
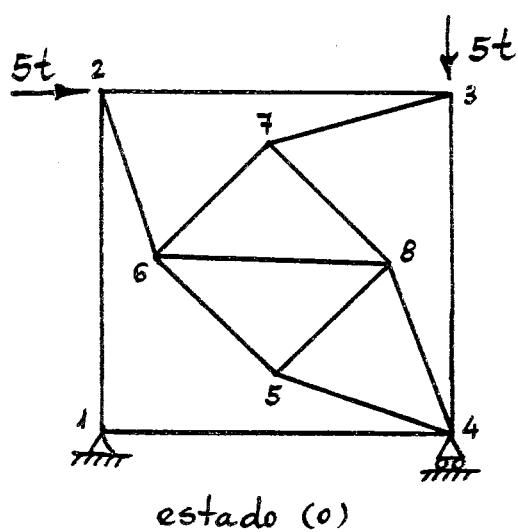


Fig. 3.17. Ejemplo 3.5. Estados auxiliares.

Los esfuerzos correspondientes a los estados anteriores, deducidos mediante el método de Cremona, se indican en la tabla 3.4.

<u>BARRA</u>	<u>N⁰</u>	<u>N¹</u>	<u>N^{Final}</u>
1-2	5.00	-2.20	4.07
1-4	5.00	-9.75	0.85
1-5	-	10.00	4.25
2-3	-4.00	-0.50	-4.21
2-6	-5.10	2.25	-4.14
3-4	-5.60	-0.10	-5.64
3-7	4.10	0.50	4.31
4-5	-4.45	10.50	-
4-8	-3.35	-2.20	-4.29
5-6	-3.80	3.50	-2.30
5-8	2.50	2.80	3.70
6-7	3.40	0.40	3.57
6-8	-0.80	-2.30	-1.78
7-8	-2.30	-0.25	-2.40

Tabla. 3.4. Ejemplo 3.5. Esfuerzos.

En dicha tabla se incluyen asimismo los esfuerzos finales en la estructura real inicial, obtenidos por aplicación de la fórmula (3.6), una vez calculados los valores de las incógnitas X^k al establecer las condiciones (3.7):

$$N_{4-5}^0 + X N_{4-5}^1 = 0 ; \quad -4.45 + 10.50 X = 0 ; \quad X = 0.425$$

$$N_i^{\text{Final}} = N_i^0 + 0.425 N_i^1$$

3.3.5. Método de las estructuras compuestas

El cálculo de esfuerzos en las estructuras articuladas isostáticas consiste en determinar un conjunto de valores de los esfuerzos en las barras, que estén en equilibrio con las fuerzas exteriores. Evidentemente, como este conjunto de valores es único, en el caso de isostatismo no es relevante el procedimiento para su obtención; por ello, es válido el método que se describe para la estructura de la figura 3.18, denominado método de las estructuras compuestas.

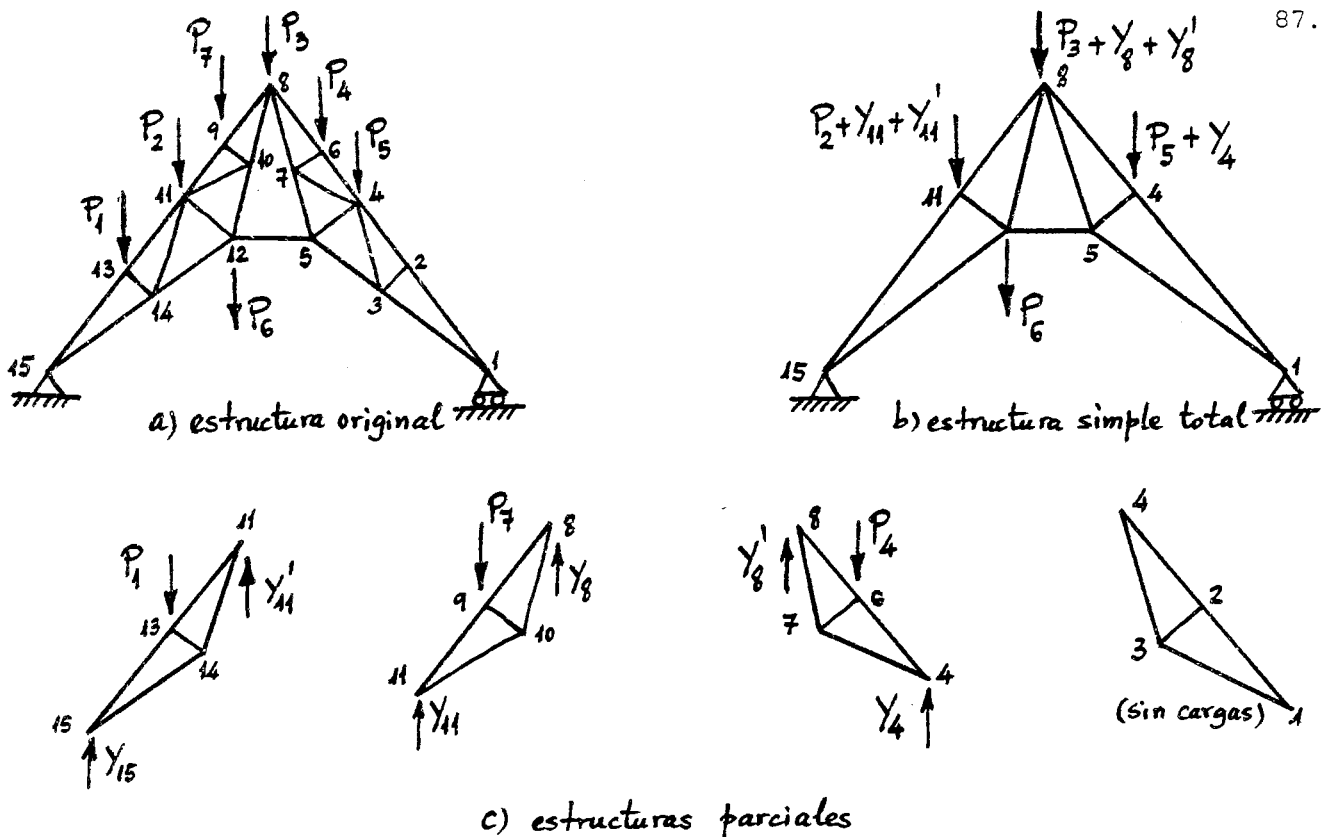


Fig. 3.18. Método de las estructuras compuestas.

En esa estructura no es posible aplicar directamente el método de Cremona, ya que la numeración en la que en cada nudo sólo existan dos barras con esfuerzos desconocidos no es posible. Se podría efectuar una sección, de modo que las barras 5-12 y 6-8 resultaran cortadas, y, mediante equilibrio de momentos de una parte de la estructura respecto al nudo 8, se deduciría el valor del esfuerzo en la barra 5-12, con lo que el Cremona podría, entonces, ser realizado.

Existe otra posibilidad, acaso más simple, que estriba en observar el hecho de que la estructura original procede de otra más sencilla, cuyas barras se han modificado mediante la introducción de estructuras adicionales (montantes), de forma tal que la longitud de pandeo se reduzca.

El procedimiento consiste en descomponer la estructura original en otra más simple, más una serie de estructuras parciales, en la forma que se indica en la figura 3.18. Se determinan, en cada una, los esfuerzos en las barras (mediante el procedimiento de Cremona, en este caso). Los resultados para la estructura original se deducen simplemente por superposición. Así, los esfuerzos en las barras 1-3 y 14-15 son los de la estructura simple; en las barras 10-11 y 4-7, los de la estructura parcial y, por último, en las barras comunes a dos estructuras, la suma de los esfuerzos en ambas, como, por ejemplo, en la barra 9-11, cuyo esfuerzo es suma del de la barra 8-11 de la estructura simple más el de la barra 9-11 de la estructura parcial correspondiente.

El fundamento de esta regla reside en el hecho del isostatismo de la estructura, que implica la unicidad de la solución (esfuerzos en las barras en equilibrio con las fuerzas exteriores), por lo que no es preciso considerar la compatibilidad de movimientos entre los nudos de la estructura simple y las parciales.

3.4. GENERALIZACION

En los métodos de cálculo de esfuerzos que se acaban de comentar en los apartados anteriores se impone que las cargas estén aplicadas en los nudos y que las barras de la estructura sean rectas. A continuación se estudia el análisis de estructuras que no satisfacen estas condiciones.

3.4.1. Cargas aplicadas en las barras

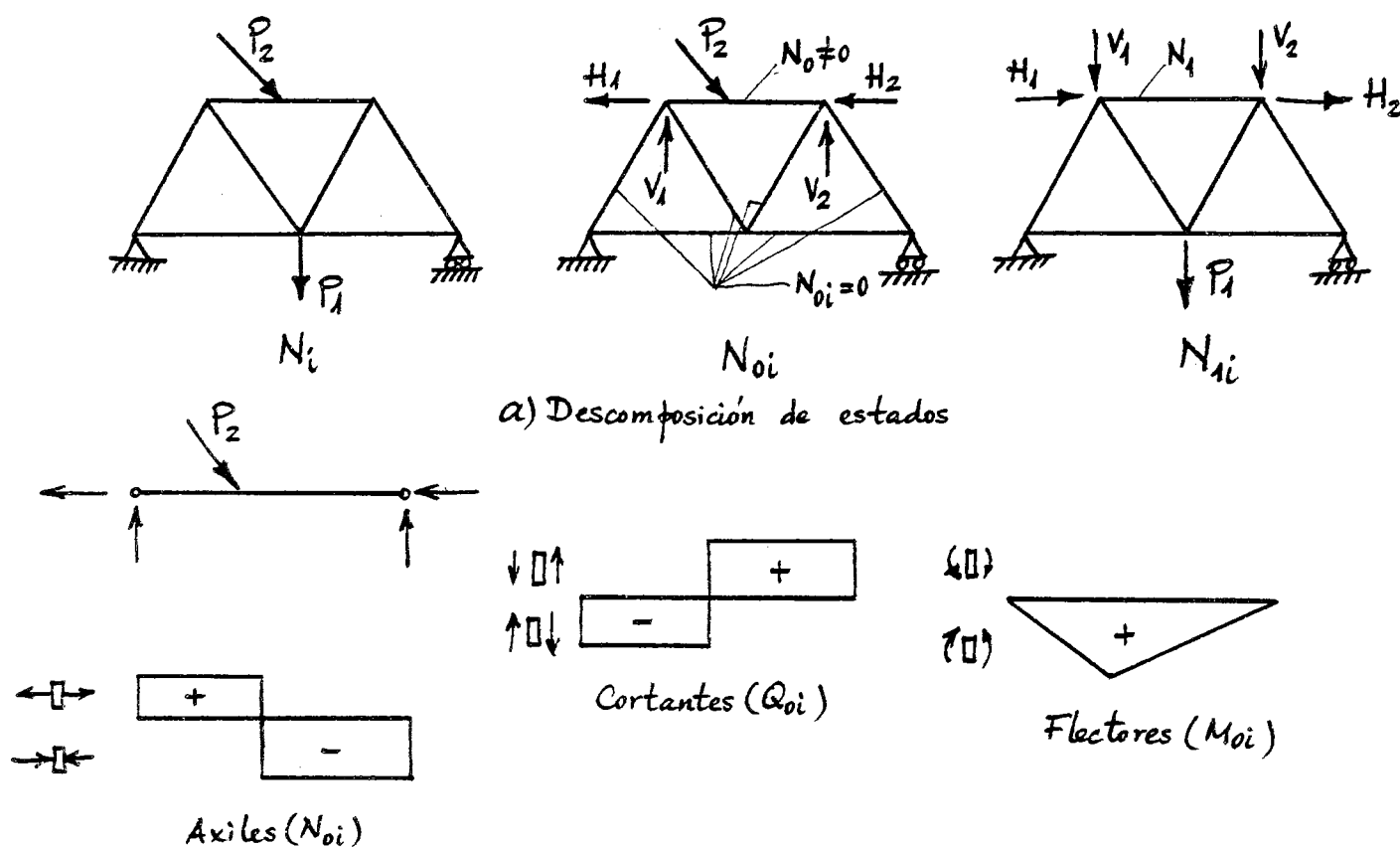
El procedimiento, en este caso, consiste en sustituir las cargas actuando en las barras por un sistema equivalente de fuerzas aplicadas en sus nudos extremos. Los esfuerzos en todas las barras, excepto las sometidas a cargas, son directamente los deducidos con estas acciones nodales equivalentes.

Por otra parte, en las barras cargadas estos esfuerzos deben de ser incrementados con las leyes de esfuerzos deducidos, para cada una de ellas, a partir del sistema de fuerzas directamente aplicadas sobre las mismas, más las reacciones (fuerzas iguales y contrarias a las acciones equivalentes en los nudos). La figura 3.19 ilustra este análisis.

Conviene tener presente que la mencionada sustitución de fuerzas aplicadas en barras por otras equivalentes en sus nudos únicamente es posible en el caso de estructuras isostáticas, y sólo para la determinación de esfuerzos -no movimientos-. El isostatismo de la estructura permite asegurar que, si bien no existe un sistema único de acciones en los nudos equivalente a las cargas actuantes sobre barras, (*) el resultado final de esfuerzos

NOTA(*): Debido a que existen cuatro incógnitas (las dos componentes de las fuerzas equivalentes en cada nudo) y sólo se dispone de las tres ecuaciones de equilibrio.

en éstas es único y, por lo tanto, independiente del sistema de fuerzas equivalentes elegido.

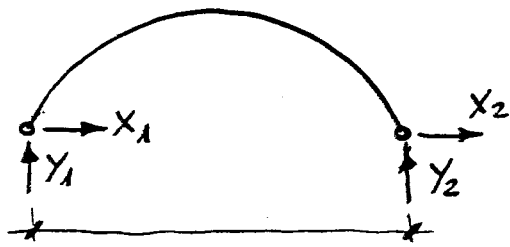


b) Esfuerzos en las barras cargadas

Fig. 3.19. Cálculo de estructuras con cargas en barras.

3.4.2. Barras curvas

En el caso de una barra curva, y supuesto primeramente que no actúe ninguna carga sobre ella, se deduce, a partir de las ecuaciones de equilibrio, que sólo existe una acción $-X_1 = X_2 = X$, correspondiente a dos fuerzas opuestas en la dirección de la cuerda que une sus nudos extremos (fig. 3.20), que representan el efecto del resto de la estructura sobre la barra.



a) Acciones sobre una barra curva

$$\left. \begin{array}{l} X_1 + X_2 = 0 \\ Y_1 + Y_2 = 0 \\ Y_2 \times L = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -X_1 = X_2 = X \\ Y_1 = Y_2 = 0 \end{array}$$

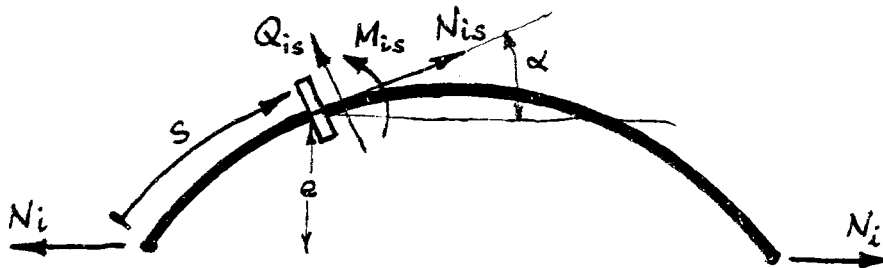
b) Ecuaciones de equilibrio

Fig. 3.20. Equilibrio de una barra curva.

Así pues, a efectos de equilibrio de esfuerzos -y aplicable únicamente al cálculo de éstos en estructuras isostáticas-, se puede sustituir una barra curva por otra recta que une sus nudos extremos. Los esfuerzos deducidos del cálculo de esta estructura deben de ser modificados en la barra curva, de acuerdo con las siguientes ecuaciones, que expresan la variación de aquéllos a lo largo de la directriz de la barra (fig. 3.21):

$$\begin{array}{ll} \text{Axiles} & : N_{is} = N_i \cos \alpha \\ \text{Cortantes} & : Q_{is} = N_i \sen \alpha \\ \text{Flectores} & : M_{is} = N_i \cdot e \end{array} \quad (3.8)$$

expresiones dadas en función de la longitud de arco, s .

Fig. 3.21. Esfuerzos en una sección genérica (s) de una barra curva.

Si la barra es de directriz circular, de radio R y ángulo central 2ϕ , las expresiones (3.8) se convierten en las siguientes:

$$\begin{array}{ll} N_{is} & = N_i \cos \alpha \\ Q_{is} & = -N_i \sen \alpha \\ M_{is} & = N_i R (\cos \theta - \cos \phi) \end{array} \quad (3.9)$$

siendo $\alpha = \phi - \frac{s}{R}$, que varía entre $-\phi$ y ϕ .

Por último, si la barra curva está cargada, se procede de modo análogo al caso general de barras cargadas descrito en el párrafo 3.4.1.; es decir, los esfuerzos en la barra curva cargada se obtienen por suma de los deducidos del cálculo de la estructura bajo cargas equivalentes en los nudos, más los producidos por las cargas aplicadas directamente sobre la barra. Así, se tiene:

$$\begin{aligned} N_{is} &= N_{lis} + N_{ois} \\ Q_{is} &= Q_{lis} + N_{ois} \\ M_{is} &= M_{lis} + M_{ois} \end{aligned} \quad (3.10)$$

siendo los esfuerzos debidos al cálculo de la estructura con cargas nodales equivalentes:

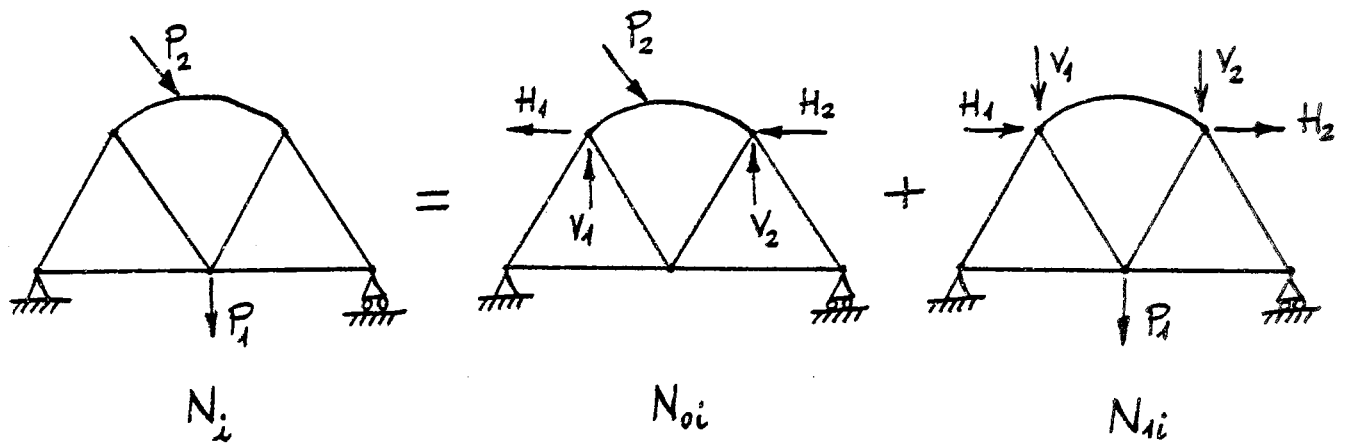
$$\begin{aligned} N_{lis} &= N_{li} \cos \alpha \\ Q_{lis} &= -N_{li} \sin \alpha \\ M_{lis} &= N_{li} \cdot e \end{aligned}$$

y los producidos por las cargas directamente aplicadas (fig. 3.22):

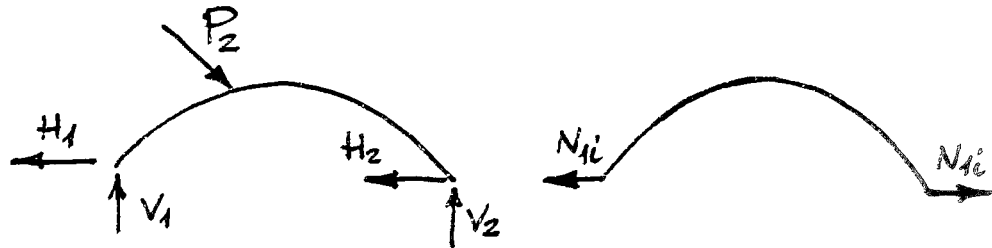
$$N_{ois}, Q_{ois}, M_{ois}$$

Los resultados anteriores pueden ser generalizados a casos en que determinadas barras constituyen, a su vez, estructuras articuladas isostáticas (subestructuras). La única condición que se debe satisfacer es que sólo existan dos nudos de unión entre la subestructura y la estructura general. La figura 3.23 ilustra el cálculo en uno de esos casos, para el que se siguen líneas paralelas al análisis de barras curvas antes descrito.

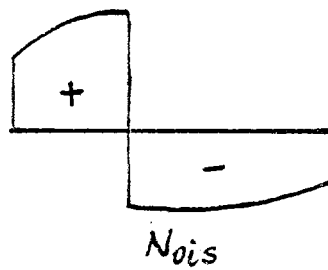
Conviene tener presente que, normalmente, en el cálculo de estructuras, los conceptos de barra y nudo pueden corresponder a situaciones más generales que las que se suelen considerar intuitivamente. Más adelante se ampliarán estas ideas.



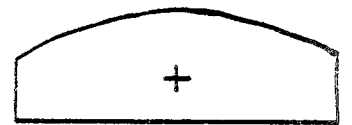
a) Descomposición en estados



Axiles

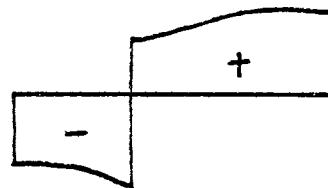


N_{ois}

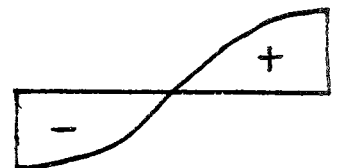


N_{iis}

Cortantes

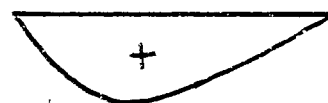


Q_{ois}



Q_{iis}

Flectores



M_{ois}



M_{iis}

b) Esfuerzos en barra curva cargada

Fig. 3.22. Cálculo de estructuras articuladas isostáticas con barras curvas cargadas.

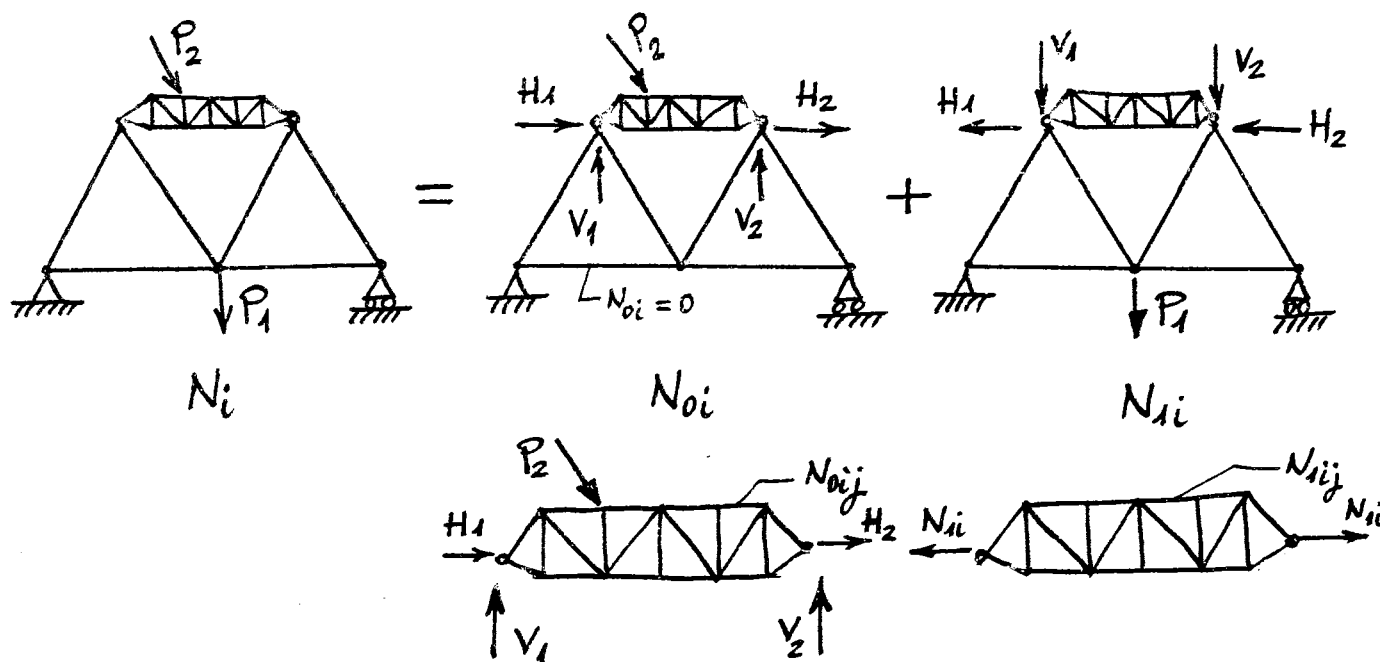


Fig. 3.23. Cálculo de estructuras con subestructuras.

Ejemplo 3.6.

Determinar los esfuerzos en las barras rectas de la estructura articulada de la figura 3.24, así como las leyes de esfuerzos en la barra curva.

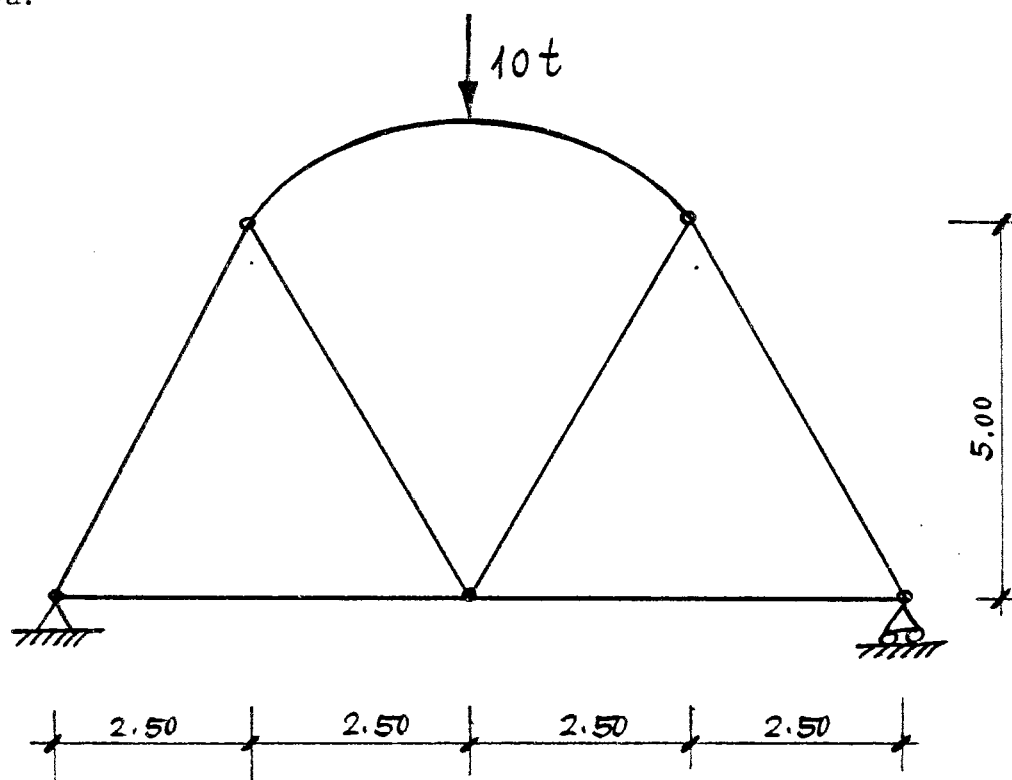


Fig. 3.24. Ejemplo 3.6.

La barra curva es circular, de 8 m de radio.

SOLUCION:

En la figura 3.25 se muestran los estados de cálculo correspondientes a las expresiones (3.10), es decir, estado de cargas directamente aplicadas sobre la barra curva (N_{0i}) y estado de cargas nodales equivalentes (N_{1i}).

Los esfuerzos originados por el sistema equivalente (fig. 3.25-b), calculados mediante el método de Cremona, se indican en la tabla 3.5, en donde se ha adoptado el signo positivo para las tracciones.

BARRA	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5
ESFUERZO	-5,6	2,5	0	-2,5	0	2,5	-5,6

Tabla 3.5. Ejemplo 3.6. Esfuerzos correspondientes al sistema equivalente de cargas.

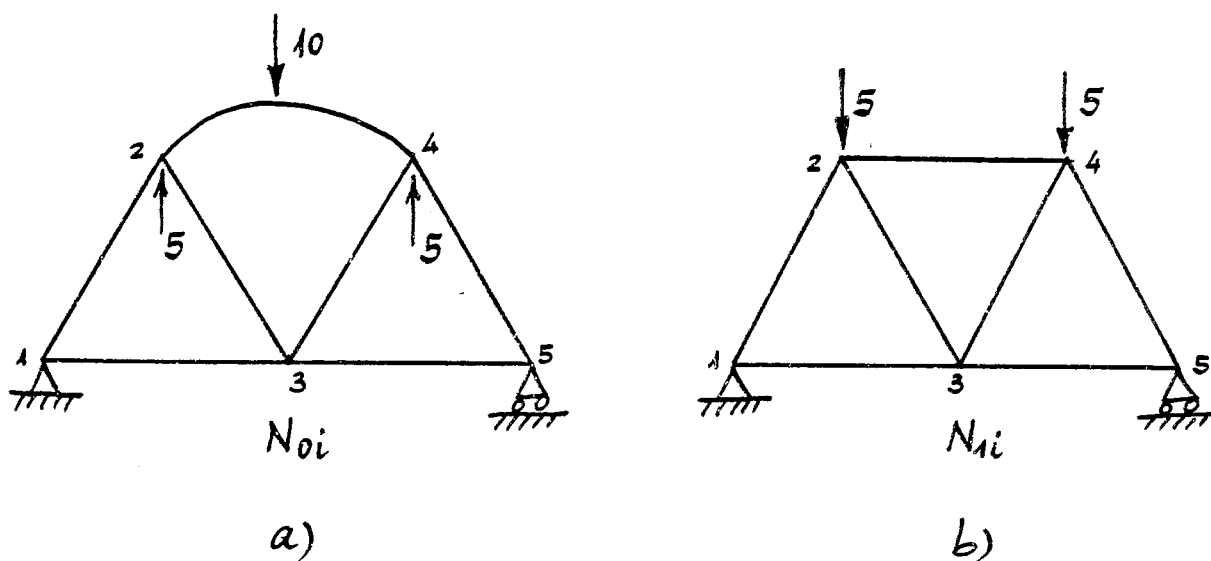
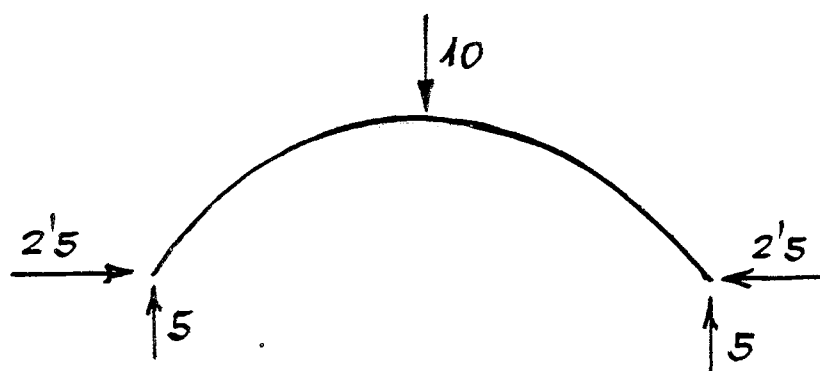


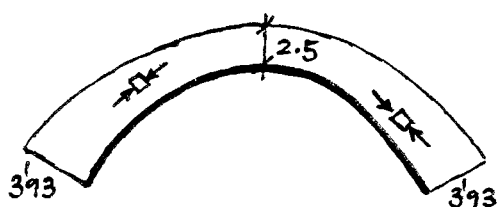
Fig. 3.25. Ejemplo 3.6. Estados de cálculo.

Los esfuerzos de la tabla anterior son los esfuerzos finales para todas las barras rectas.

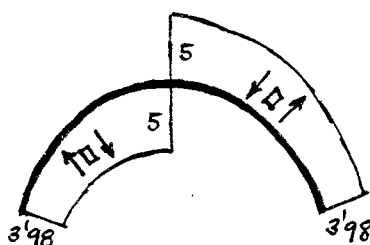
Para la barra curva, el estado b) proporciona una compresión de 2,5t en la dirección de la cuerda, a la cual hay que superponer los esfuerzos originados por el estado a). Es decir, los esfuerzos en la barra curva (axiles, cortantes y flectores) son los originados por las acciones que se indican en la figura 3.26.



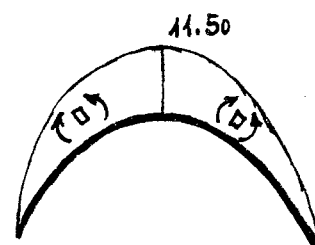
a) Acciones.



b) Axiles.



c) Cortantes.



d) Flectores.

Fig. 3.26. Ejemplo 3.26. Esfuerzos en la barra curva.

3.5. EJERCICIOS PROPUESTOS. ENUNCIADOS

Ejercicio 3.1.

Determinar las reacciones en la estructura de la figura 3.27.

Ejercicio 3.2.

Obtener, mediante el método gráfico de Cremona, las reacciones y esfuerzos en todas las barras de la estructura representada en la figura 3.28.

Ejercicio 3.3.

Determinar los esfuerzos en todas las barras de la estructura adjunta (fig. 3.29).

Ejercicio 3.4.

Calcular los esfuerzos en las barras de la estructura que se muestra en la figura 3.30.

Ejercicio 3.5.

En la estructura de la figura 3.31, hallar los esfuerzos en sus barras a partir de las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes.

Ejercicio 3.6.

Obtener los esfuerzos en las barras de la estructura que se acompaña (fig. 3.32), mediante el procedimiento de Henneberg.

Ejercicio 3.7.

Determinar en la estructura de la figura (fig. 3.33) los esfuerzos en todas las barras.

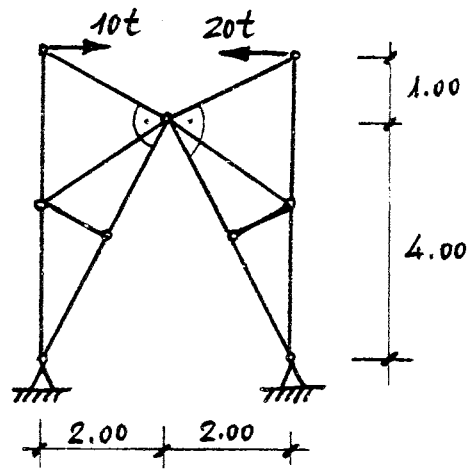


Fig. 3.27. Ejercicio 3.1.

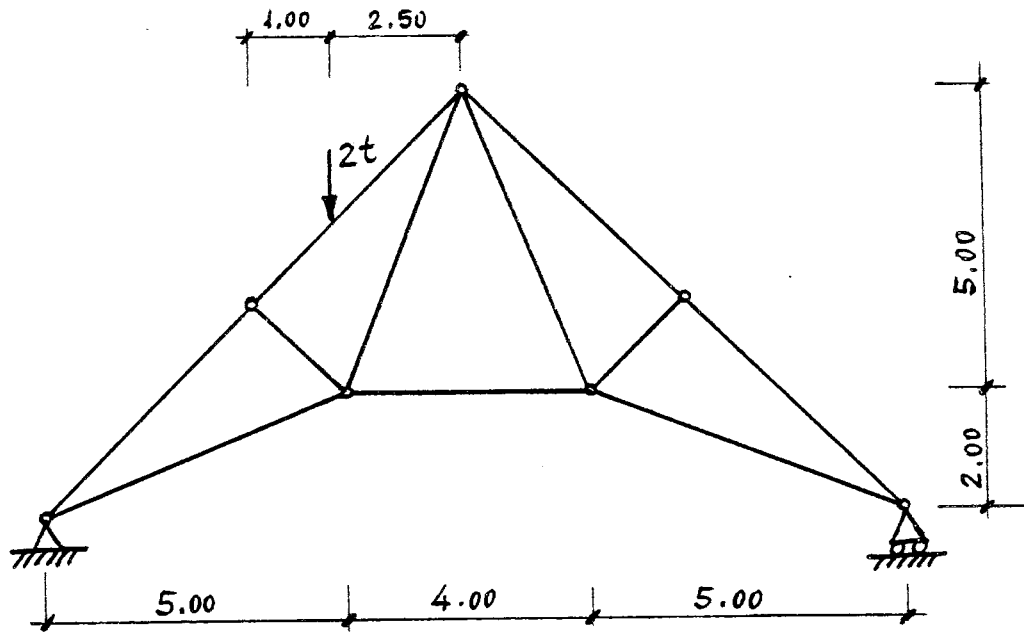


Fig. 3.28. Ejercicio 3.2.

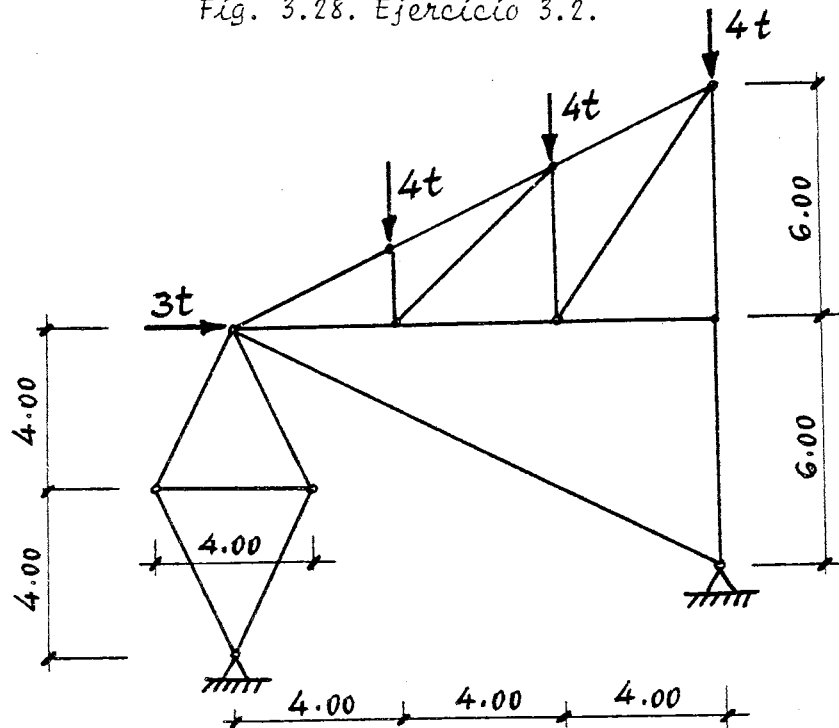


Fig. 3.29. Ejercicio 3.3.

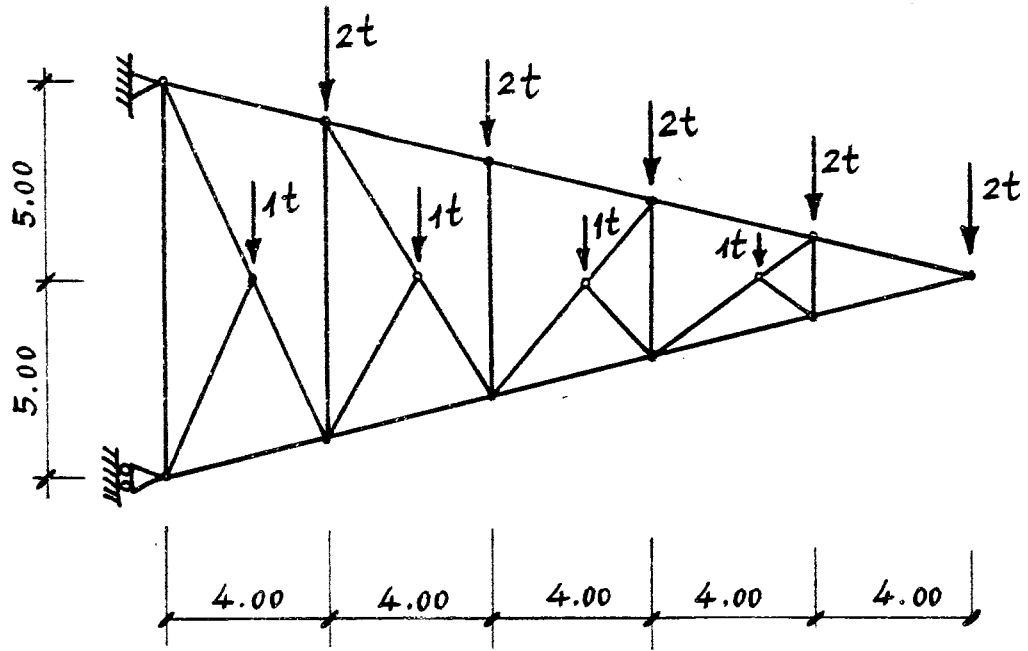


Fig. 3.33. Ejercicio 3.7.

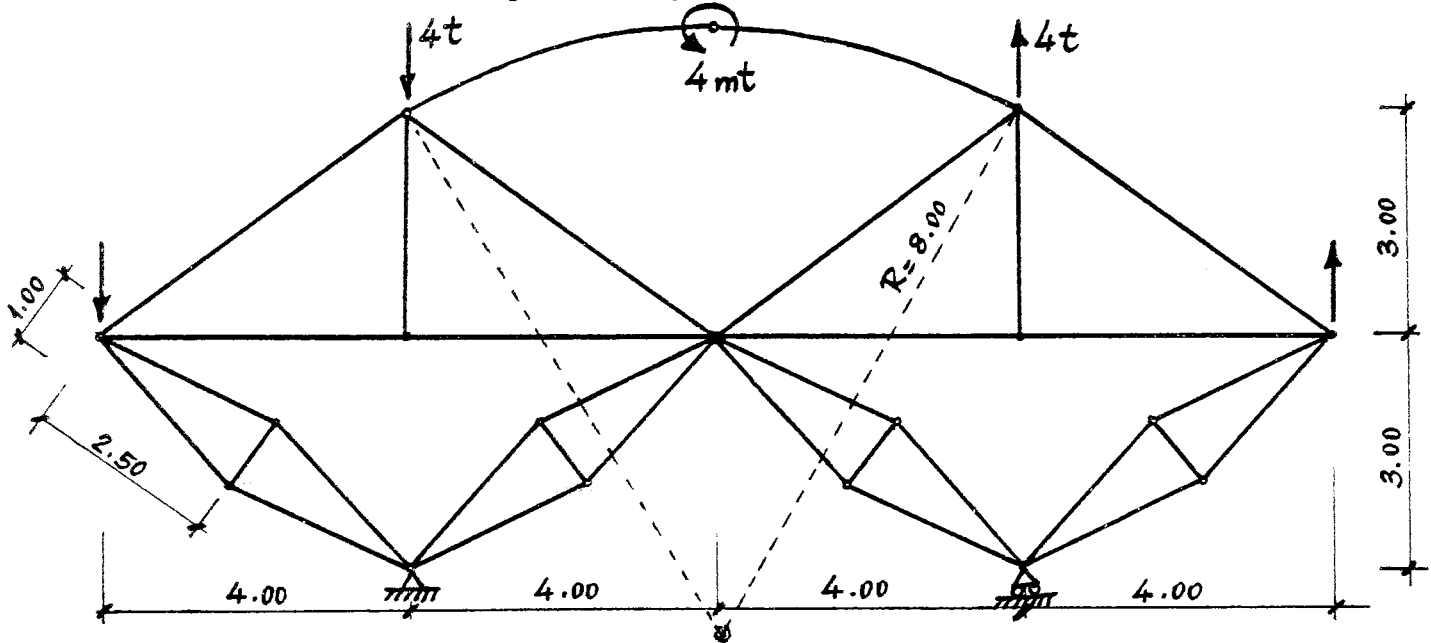
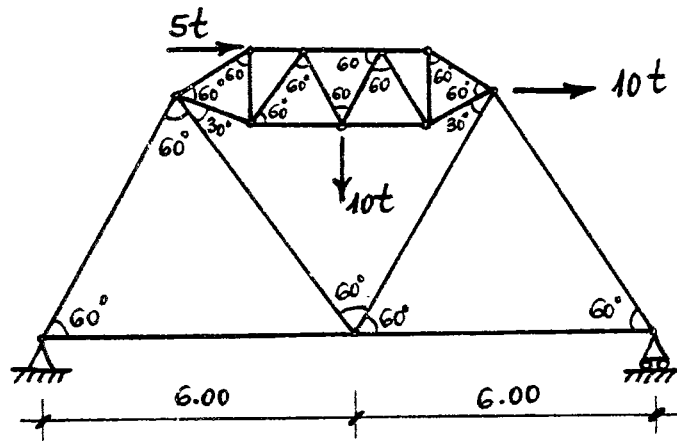


Fig. 3.34. Ejercicio 3.8.



Para todas las barras
 $\frac{L}{E\Omega} = 3 \times 10^{-4} \text{ m/t}$

Fig. 3.35. Ejercicio 3.9.

Ejercicio 3.8.

En la estructura representada en la figura 3.34, calcular las leyes de esfuerzos en todas las barras. Previamente se indicarán y suprimirán las barras que no trabajan.

Ejercicio 3.9.

Hallar las leyes de esfuerzos en las barras de la estructura adjunta (fig. 3.35).

Ejercicio 3.10.

Determinar los esfuerzos en todas las barras de la estructura que se muestra en la figura 3.36.

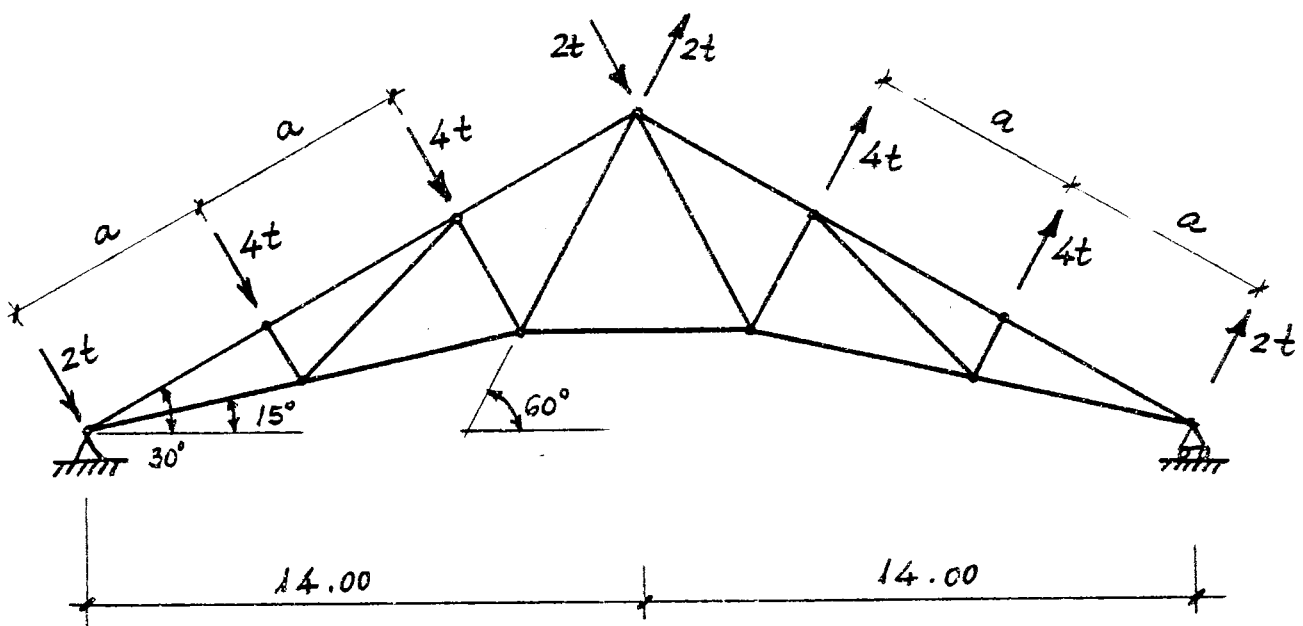
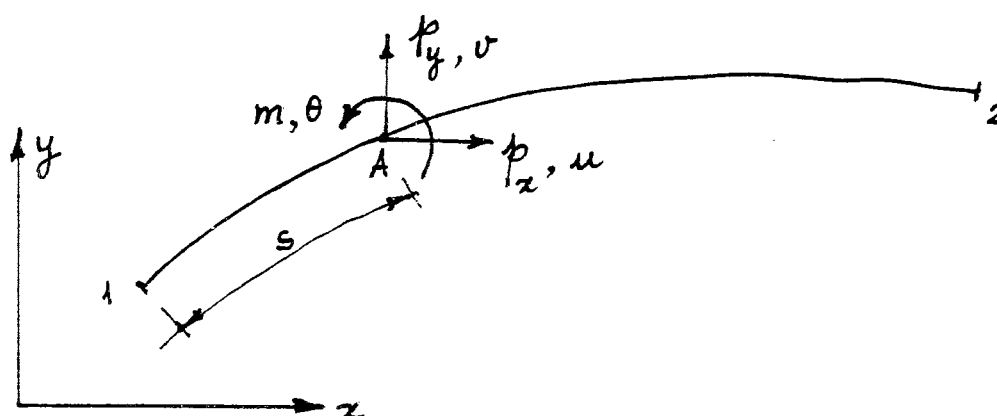


Fig. 3.36. Ejercicio 3.10.

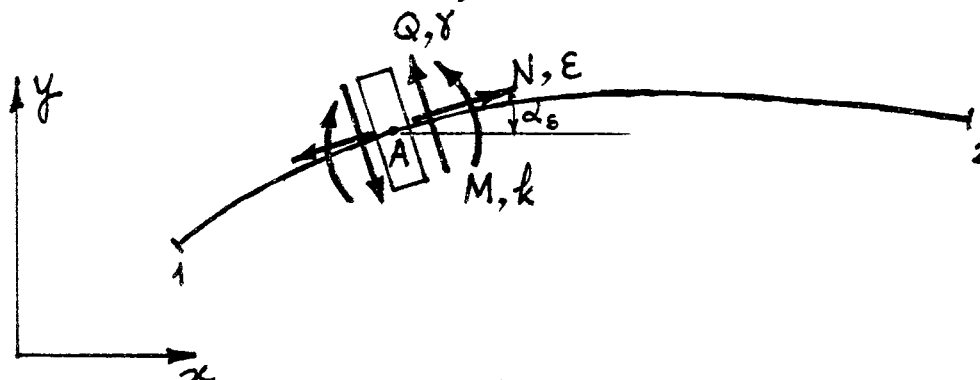
CAPITULO 4.- ESTRUCTURAS ARTICULADAS ISOSTATICAS. DETERMINACION DE MOVIMIENTOS

4.1. INTRODUCCION

En este capítulo se utilizará el teorema de Castigliano para la determinación de los movimientos de las estructuras articuladas isostáticas. Este teorema expresa que la derivada respecto a una fuerza generalizada (influjo) de la energía complementaria de deformación de una estructura es el movimiento eficaz con el influjo. La demostración de este teorema puede verse en un texto de Resistencia de Materiales. Aquí sólo se dará la expresión del mismo referido a estructuras planas de barras, sin merma de que, en un próximo capítulo, se planteen con generalidad los métodos energéticos en el Cálculo de Estructuras, y en donde el teorema de Castigliano -en realidad existen dos- se inserta de un modo adecuado.



a) Acciones y movimientos



b) Esfuerzos y deformaciones

Figura 4.1.- Estructura plana monodimensional.

La estructura plana monodimensional se define por las coordenadas de la directriz (x_s, y_s) , funciones del arco s , así como por las características mecánicas de las secciones: Ω_s , A_s e I_s , que corresponden al área, área reducida de cortante e inercia a flexión, respectivamente.

Por otra parte, se supone que actúan unas fuerzas distribuidas (*), de intensidades p_{xs} y p_{ys} , y un momento distribuido m_s , así como unas deformaciones impuestas iniciales (debidas a acciones térmicas, errores constructivos, etc.): ϵ_{os} , γ_{os} y k_{os} . Los esfuerzos que se producen en una sección $-N_s$, Q_s y M_s - introducen unas deformaciones elásticas dadas por las fórmulas constitutivas:

$$\epsilon_s = \frac{N_s}{E\Omega_s}, \quad \gamma_s = \frac{Q_s}{GA_s} \quad \text{y} \quad k_s = \frac{M_s}{EI_s} \quad (4.1)$$

en donde E es el módulo de deformación longitudinal y G el de deformación transversal, cuya expresión es $G = E/2(1+\nu)$, siendo ν el coeficiente de Poisson.

Los movimientos generados por las deformaciones totales -suma de las iniciales y las elásticas- son u_s , v_s y θ_s . El convenio de signos de estas magnitudes se ha representado en sus valores positivos en la figura 4.1.

Los esfuerzos en una sección genérica se deducen a partir de las fuerzas exteriores como sigue:

$$\begin{aligned} N_s &= \cos\alpha_s \int_s^1 p_{x\xi} d\xi + \sin\alpha_s \int_s^1 p_{y\xi} d\xi \\ Q_s &= -\sin\alpha_s \int_s^1 p_{x\xi} d\xi + \cos\alpha_s \int_s^1 p_{y\xi} d\xi \\ M_s &= \int_s^1 m_\xi d\xi + \int_s^1 p_{x\xi}(y_s - y_\xi) d\xi + \int_s^1 p_{y\xi}(x_\xi - x_s) d\xi \end{aligned} \quad (4.2)$$

(*) El caso de una carga puntual aislada, aparte de su imposibilidad física -siempre se encuentra repartida en una área finita-, puede ser tratado matemáticamente como carga repartida, mediante la adopción de la función generalizada de Dirac.

con $\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{dy}{dx} \quad (*)$

Por otra parte, los movimientos de la sección A se deducen mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} u_s &= u_1 + \theta_1 (y_1 - y_s) + \int_0^s (\epsilon_{0\xi} + \epsilon_\xi) \cos \alpha_\xi d\xi - \int_0^s (\gamma_{0\xi} + \gamma_\xi) \sin \alpha_\xi d\xi + \\ &\quad + \int_0^s (k_{0\xi} + k_\xi) (y_\xi - y_s) d\xi \\ v_s &= v_1 + \theta_1 (x_s - x_1) + \int_0^s (\epsilon_{0\xi} + \epsilon_\xi) \sin \alpha_\xi d\xi + \int_0^s (\gamma_{0\xi} + \gamma_\xi) \cos \alpha_\xi d\xi + \\ &\quad + \int_0^s (k_{0\xi} + k_\xi) (x_s - x_\xi) d\xi \\ \theta_s &= \theta_1 + \int_0^s (k_{0\xi} + k_\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.3)$$

siendo u_1 , v_1 y θ_1 los movimientos del extremo 1 de la viga.

Es posible mostrar que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es igual a la energía de deformación U . La expresión de ésta es:

$$U = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{N_s}{E\Omega_s} + \epsilon_{0s} \right) N_s ds + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{Q_s}{GA_s} + \gamma_{0s} \right) Q_s ds + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{M_s}{EI_s} + k_{0s} \right) M_s ds \quad (4.4)$$

En general, si la estructura es compleja, las integrales anteriores se convierten en integrales curvilíneas a lo largo de la directriz.

El teorema de Castigliano establece que el movimiento r eficaz con el influjo R es:

$$r = \frac{\partial U}{\partial R} \quad (4.5)$$

(*) El cálculo anterior considera la parte frontal de la estructura a la sección A, pero es posible plantear de un modo semejante, salvo cambio de signos, el análisis con relación a la parte dorsal.

La fórmula (4.5) permite calcular el movimiento en cualquier sección de una estructura, mediante el siguiente artificio:

Se introduce un influjo unidad ($R=1$) en la estructura, eficaz con el movimiento que se desea determinar. Los esfuerzos debidos a este influjo se designan por N_s^1 , Q_s^1 , M_s^1 . Por otra parte, los esfuerzos de la estructura bajo las acciones existentes son N_s^0 , Q_s^0 , M_s^0 . Se considera la superposición de los dos estados: el real y el producido por el influjo de magnitud R , es decir, con los esfuerzos:

$$\begin{aligned} N_s &= N_s^0 + R N_s^1 \\ Q_s &= Q_s^0 + R Q_s^1 \\ M_s &= M_s^0 + R Q_s^1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

La energía de deformación en este nuevo estado de cargas es función de la magnitud R del influjo, o sea:

$$U = U(R)$$

y, por lo tanto, según (4.5)

$$r = \left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{R=0} \quad (4.7)$$

en donde $R=0$ implica que la carga R no existe sobre la estructura, y se ha aplicado provisionalmente, con objeto de obtener la derivada de la energía de deformación U .

Desarrollando la expresión (4.7), se llega al siguiente resultado:

$$r = \oint \left(\frac{N_s^0}{E\Omega_s} + \epsilon_{0s} \right) N_s^1 ds + \oint \left(\frac{Q_s^0}{GA_s} + \gamma_{0s} \right) Q_s^1 ds + \oint \left(\frac{M_s^0}{EI_s} + k_{0s} \right) M_s^1 ds \quad (4.8)$$

Si se designa por ϵ_s^0 , γ_s^0 y k_s^0 a las deformaciones totales, suma de las elásticas y las iniciales, la fórmula (4.8) se escribe en la siguiente forma:

$$r = \oint \epsilon_s^0 N_s^1 ds + \oint \gamma_s^0 N_s^1 ds + \oint k_s^0 M_s^1 ds \quad (4.9)$$

En lo sucesivo se despreciará la deformación por cortante, es decir, se supondrá que $\gamma_{0s} = 0$ y $1/GA_s = 0$, es decir $\gamma_s^0 = 0$.

A continuación se hace aplicación de la fórmula (4.9) a sucesivos casos de estructuras articuladas isostáticas.

4.2.- ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS Y CARGAS EN NUDOS

Si se designa por N_i^0 el esfuerzo axil que se producen en la barra i de la estructura a causa de las acciones exteriores y N_i^1 el correspondiente a la acción del influjo unidad eficaz con el movimiento que se desea determinar en un nudo, se obtiene, al utilizar (4.9) y no existir esfuerzos de flexión -ya que todas las cargas están aplicadas en los nudos-, la siguiente expresión:

$$r = \oint \epsilon_s^0 N_s^1 ds$$

o bien, si B es el número de barras de la estructura:

$$r = \sum_{i=1}^B \int_0^{L_i} \epsilon_s^0 N_s^1 \frac{ds}{E\Omega_s} = \sum_{i=1}^B N_i^1 \int_0^{L_i} \left(\frac{N_s^0}{E\Omega_s} + \epsilon_{0s} \right) ds \quad (4.10)$$

Dado que $N_s^1 = N_i^1$ y $N_s^0 = N_i^0$ son constantes a lo largo de la barra i , cuya longitud es L_i , y $\epsilon_{0s} = \epsilon_{0is}$ representa la deformación inicial impuesta (producida por temperatura, error de ejecución, etc), se puede calcular la separación entre los extremos de una barra:

$$\bar{\Delta}_{0i} = \int_0^{L_i} \epsilon_{0is} ds \quad (\text{alargamiento inicial de la barra})$$

$$\frac{L_i}{E\Omega_i} = \int_0^{L_i} \frac{ds}{E\Omega_s} \quad (\text{elongabilidad de la barra, o movimiento entre sus extremos cuando actúa un esfuerzo unidad})$$

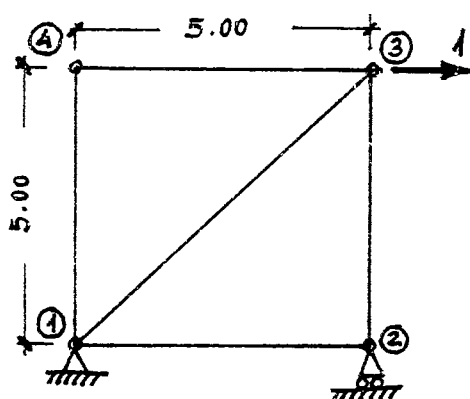
y se obtiene finalmente:

$$r = \sum_{i=1}^B (N_i^0 \frac{L_i}{E\Omega_i} + \bar{\Delta}_{0i}) N_i^1 = \sum_{i=1}^B \Delta_i^0 N_i^1 \quad (4.11)$$

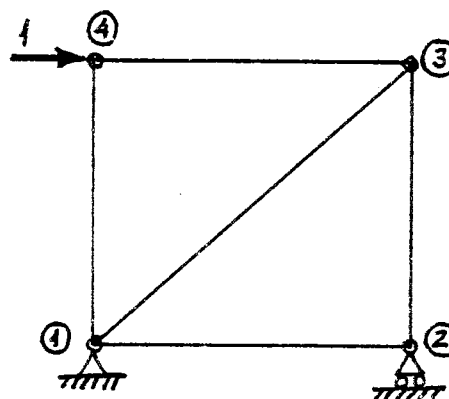
donde $\Delta_i^0 = \Delta_{0i} + \bar{\Delta}_{0i}$ representa la suma de las deformaciones elásticas ($\Delta_{0i} = N_i^0 L_i / E\Omega_i$) e iniciales ($\bar{\Delta}_{0i}$).

Ejemplo 4.1.

En la estructura de la figura 4.2 todas las barras tienen igual elongabilidad $L_i / E\Omega_i = 10$ cm/t. Determinar el desplazamiento horizontal del nudo 4.



Estado (0)



Estado (1)

Figura 4.2.- Determinación de movimientos.

SOLUCION:

Se llevan a cabo dos cálculos de esfuerzos en cada uno de los estados indicados en la figura 4.2: estado (0) bajo las cargas reales actuantes, y estado (1) bajo la acción del influjo unidad. Una vez conocidos estos esfuerzos se construye la tabla 4.1.

BARRA	$L_i / E\Omega_i$	N_i^0	$\Delta_{0i} = N_i^0 \cdot L_i / E\Omega_i$	$\bar{\Delta}_{0i}$	Δ_i^0	N_i^1	$\Delta_i^0 N_i^1$
1-2	10	0	0	0	0	0	0
1-3	10	$\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	0	$10\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	20
1-4	10	0	0	0	0	0	0
2-3	10	-1	-10	0	-10	-1	10
3-4	10	0	0	0	0	-1	0
Σ							30

Tabla 4.1.- Determinación de movimientos.

Solución: $u_4 = 30$ cm.

Conviene observar que para obtener otros movimientos sólo es preciso calcular las dos últimas columnas de la tabla 4.1: la correspondiente a los esfuerzos N_i^1 -que se deducen del cálculo del estado auxiliar (1) bajo el influjo unidad-, y el producto y suma consiguiente de $N_i^1 \Delta_i^0$.

Los estados auxiliares dependen del movimiento que se intenta calcular. En la figura 4.3 se muestran algunos de los influjos unitarios precisos para obtener los distintos movimientos.

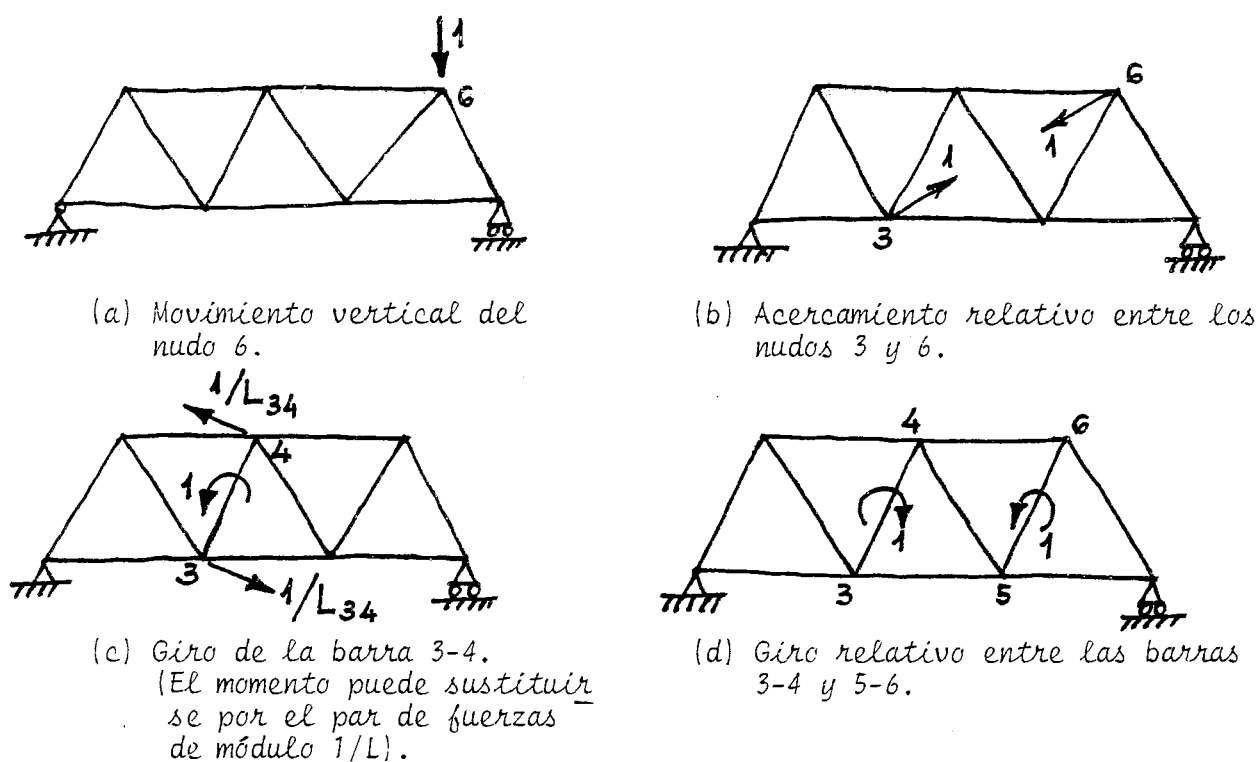


Figura 4.3.- Influjos unitarios del estado 1, según los diferentes movimientos.

Si el movimiento se refiere no a un nudo de la estructura, sino a una sección de una barra (figura 4.4), entonces el estado 1 presenta, a lo largo de la barra (o barras) en las que está aplicado el influjo, una ley de esfuerzos axiales variable, así como de momentos flectores. La expresión (4.11) debe, por lo tanto, modificarse como sigue:

En el estado (0) existen esfuerzos axiales constantes en todas las barras, por estar todas las cargas aplicadas en los nudos. Sea N_i^0 el esfuerzo en la barra i .

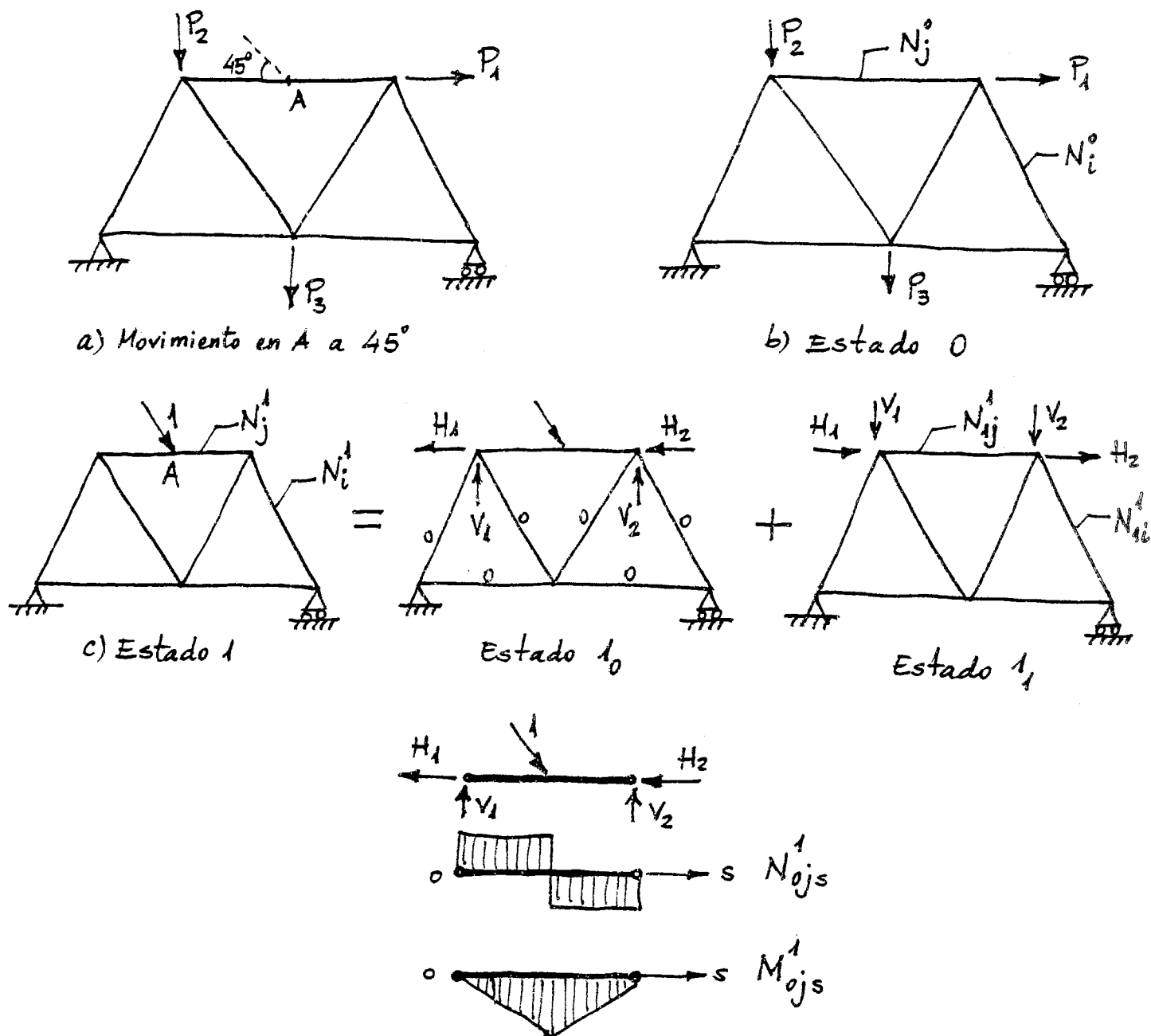


Figura 4.4.- Movimiento en una sección de una barra.

Notas: El superíndice 0 indica estado real de cargas.

1 indica estado auxiliar de cargas (influjo eficaz unidad).

El subíndice 0 expresa esfuerzos en las barras aislados, bajo las cargas actuantes directamente y sus reacciones.

1 hace referencia a los esfuerzos deducidos de todas las cargas trasladadas a los nudos.

En el estado (1), el esfuerzo axil en la barra en la que actúa el influjo es variable, y vale:

$$N_i^1 = N_{li}^1 + N_{ois}^1$$

y la ley de momentos flectores en dicha barra es:

$$M_i^1 = M_{li}^1 + M_{ois}^1 = M_{ois}^1$$

En estas expresiones se han indicado por N_{ois}^1 y M_{ois}^1 las leyes de esfuerzos (variables con la distancia s en la barra i) producidas por la aplicación de las cargas directamente sobre la barra i . El valor N_{li}^1 - ($M_{li}^1 = 0$) es el esfuerzo que aparece en la barra i debido a la actuación de las cargas sobre los nudos (figura 4.4).

En las restantes barras (que no están cargadas) el axil es constante $-N_{li}^1$ y el momento flector no existe.

Por lo tanto, la fórmula (4.10) se convierte en:

$$r = \sum_{i \in I_2} \Delta_i^0 N_{li}^1 + \sum_{i \in I_1} \left\{ \int_0^{L_i} \left(\frac{N_i^0}{E\Omega_s} + \epsilon_{ois} \right) (N_{li}^1 + N_{ois}^1) ds + \int_0^{L_i} \left(\frac{M_i^0}{EI_s} + k_{ois} \right) (M_{li}^1 + M_{ois}^1) ds \right. \quad (4.12-a)$$

en donde I_1 e I_2 representan los conjuntos de barras del estado 1 cargadas, respectivamente, con el influjo unidad.

Puesto que $M_i^0 = 0$, si se supone que $k_{ois} = 0$, se obtiene:

$$r = \sum_{i=1}^B \Delta_i^0 N_{li}^1 + \sum_{i \in I_1} \int_0^{L_i} N_{ois}^1 \left(\frac{N_i^0}{E\Omega_s} + \epsilon_{ois} \right) ds$$

o bien

$$r = \sum_{i=1}^B \Delta_i^0 N_{li}^1 + r_0^0 \quad (4.12-b)$$

siendo $\Delta_i^0 = N_i^0 \cdot L_i / E\Omega_i + \bar{\Delta}_{oi}$ el alargamiento total de la barra i en el estado 0 (suma de las deformaciones elásticas e inicial).

N_{li}^1 es el esfuerzo de la barra i en el estado (1), supuesto que actúan cargas en los nudos y las cargas en las barras están trasladadas asimismo a los nudos.

$$r_0^0 = \sum_{i \in I_1} N_i^0 \Delta_i^1 + \overline{\Delta r}_0 = \Delta r_0 + \overline{\Delta r}_0$$

es el incremento de movimiento r debido a la actuación de las cargas y deformaciones en las barras con secciones en las que se desea obtener el movimiento r . Se observa que este incremento r_0^0 está compuesto de dos sumandos. El primero es:

$$\Delta r_0 = \sum_{i \in I_1} N_i^0 \Delta_i^1$$

con Δ_i^1 el alargamiento de la barra i en el estado 1, considerando las acciones y reacciones supuestas en dicha barra, es decir:

$$\Delta_i^1 = \int_0^{L_i} \frac{N_{0is}^1}{E\Omega_s} ds$$

El otro sumando es

$$\overline{\Delta r}_0 = \sum_{i \in I_1} \int_0^{L_i} \epsilon_{0is} N_{0is}^1 ds$$

y corresponde al incremento de movimiento r producido en la barra o barras aisladas en las que actúa el influjo unidad, como consecuencia de la distribución inicial impuesta de deformaciones axiales.

Evidentemente, si en la descomposición de las cargas unitarias (influjo unidad), que actúan sobre la barra genérica $i (i \in I_2)$, se eligen como fuerzas en los nudos las opuestas a las reacciones en los extremos de aquélla, supuesta biarticulada en dichos extremos -y, por lo tanto, con movimiento relativo nulo entre los mismos-, se obtiene $\Delta_{0i}^1 = 0$, y la fórmula (4.12) se reduce a la siguiente:

$$r = \sum_{i=1}^B \Delta_i^0 N_{1i}^1 + r_0^0 \quad (4.13)$$

Así, en el ejemplo 4.1 anteriormente desarrollado, la tabla 4.1, para la determinación de movimientos, conserva su validez, siendo preciso solamente añadir al valor allí obtenido el incremento de movimiento debido a las deformaciones iniciales ϵ_{0s} en las barras i cargadas con el influjo unidad.

Ejemplo 4.2.

En la estructura representada en la figura 4.5-a, determinar el movimiento de la sección central de la barra 3-4, según una dirección que forma un ángulo de 45° con la vertical. Se verifica, para todas las barras, $L_i/E\Omega_i = 10 \text{ cm/t}$.

SOLUCION:

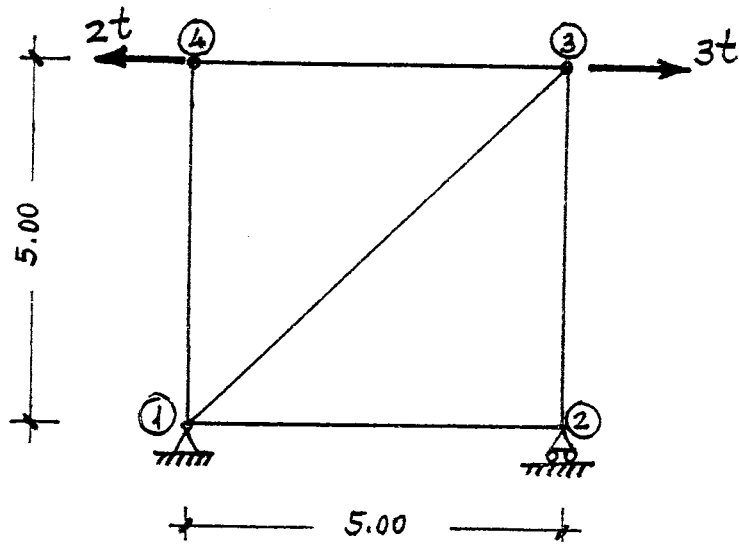
El estado auxiliar se muestra en la figura 4.5-b.

Las diferentes magnitudes que intervienen en el cálculo se indican en la tabla 4.2:

BARRA	$L_i/E\Omega_i$	N_i^0	$\Delta_{0i}^0 = N_i^0 L_i/E\Omega_i$	$\bar{\Delta}_{0i}^0$	Δ_i^0	N_{0is}^1	N_{li}^1	Δ_{i-li}^0	Δ_i^1	N_i^0	Δ_i^1
1-2	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-3	10	$\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	0	$10\sqrt{2}$	0	1	$10\sqrt{2}$	0	0	0
1-4	10	0	0	0	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	0	0	0
2-3	10	-1	-10	0	-10	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$15\sqrt{2}/2$	0	0	0
3-4	10	2	20	0	20	$\sqrt{2}/2$ en 4-A 0 en A-3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-10\sqrt{2}$	$5\frac{\sqrt{2}}{2}$	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
									$15\sqrt{2}/2$	$10\sqrt{2}/2$	

Tabla 4.2.- Ejemplo 4.2.- Resultados.

Se ha hecho uso de la fórmula general (4.12-a). En este caso, M_i^0 y k_{0is} son nulos en todas las barras, por lo que la expresión a utilizar es la (4.12-b), es decir:



a) Estado 0

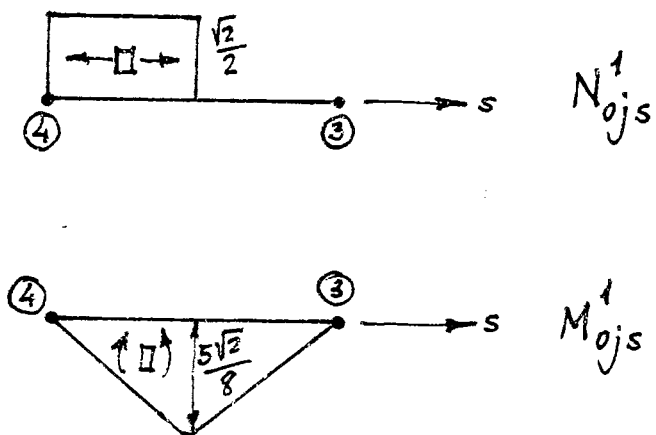
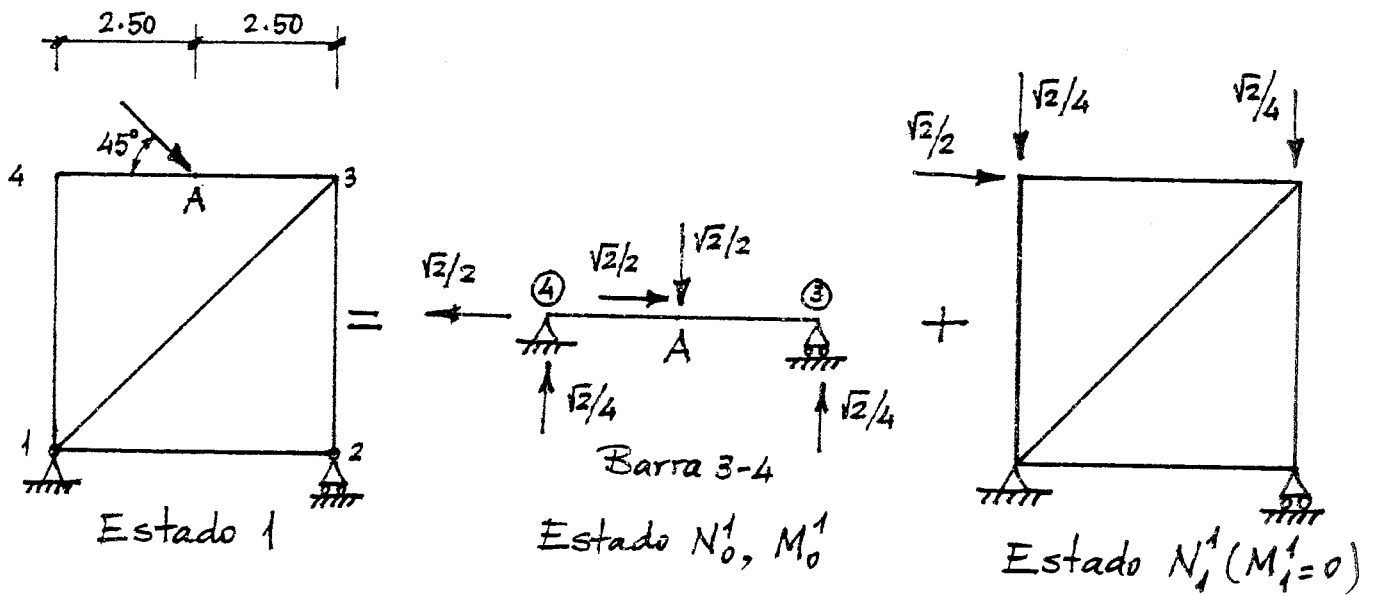


Figura 4.5.- Ejemplo 4.2.

$$r = \sum_{i=1}^B \Delta_i^0 N_{li}^1 + r_0^0$$

El primer sumando es, según la tabla, $15\sqrt{2}/2$ cm. El segundo, r_0^0 , consta a su vez de dos sumandos. Por una parte $\bar{\Delta}r_0 = \sum_{i \in I_1} \int_0^{L_i} \epsilon_{0is} N_{0is}^1 ds = 0$, dado que $\epsilon_{0is} = 0$ para todo i , y por otra $\Delta r_0 = \sum_{i \in I_1} N_{0i}^0 \Delta_i^1$, con $\Delta_i^1 = \int_0^{L_i} (N_{0is}^1 / E\Omega_s) ds$.

En este caso sólo existe:

$$\Delta_{3-4}^1 = \int_0^{5/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{ds}{E\Omega_s} + \int_{\frac{5}{2}}^5 0 \cdot ds / E\Omega_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{2}/2$$

Así pues, el resultado final es $15\sqrt{2}/2 + 10\sqrt{2}/2 = 25\sqrt{2}/2$ cm.

4.3. ESTRUCTURAS DE BARRAS RECTAS Y CARGAS EN BARRAS

Se pueden distinguir asimismo dos casos: El movimiento a calcular corresponde a un nudo o a una sección intermedia de una barra.

En el primer caso el cálculo sigue las siguientes etapas (figura 4.6): Se calcula la estructura bajo las cargas reales actuantes (estado 0). Para ello, en las barras en las que existen cargas aplicadas, se trasladan éstas a los extremos, de forma isostática, y se calcula la estructura bajo cargas en nudos. Los esfuerzos en las barras no cargadas son directamente los resultados de este cálculo ($N_i^0 = N_{li}^0$); en las barras cargadas, deben ser incrementados con los producidos al considerar dichas barras como vigas sometidas a las acciones directamente aplicadas, con las reacciones correspondientes (cuyos valores opuestos han sido introducidos en el cálculo general de la estructura), es decir, los esfuerzos en estas barras cargadas son variables a lo largo de la barra y, en particular, los axiles y flectores son:

$$N_i^0 = N_{0is}^0 + N_{li}^0 \quad \text{y} \quad M_i^0 = M_{0is}^0 + M_{li}^0$$

El estado auxiliar se obtiene, como es usual, introduciendo el influjo unidad eficaz con el movimiento a determinar. Los valores de los esfuerzos en este estado se designan por N_i^1 .

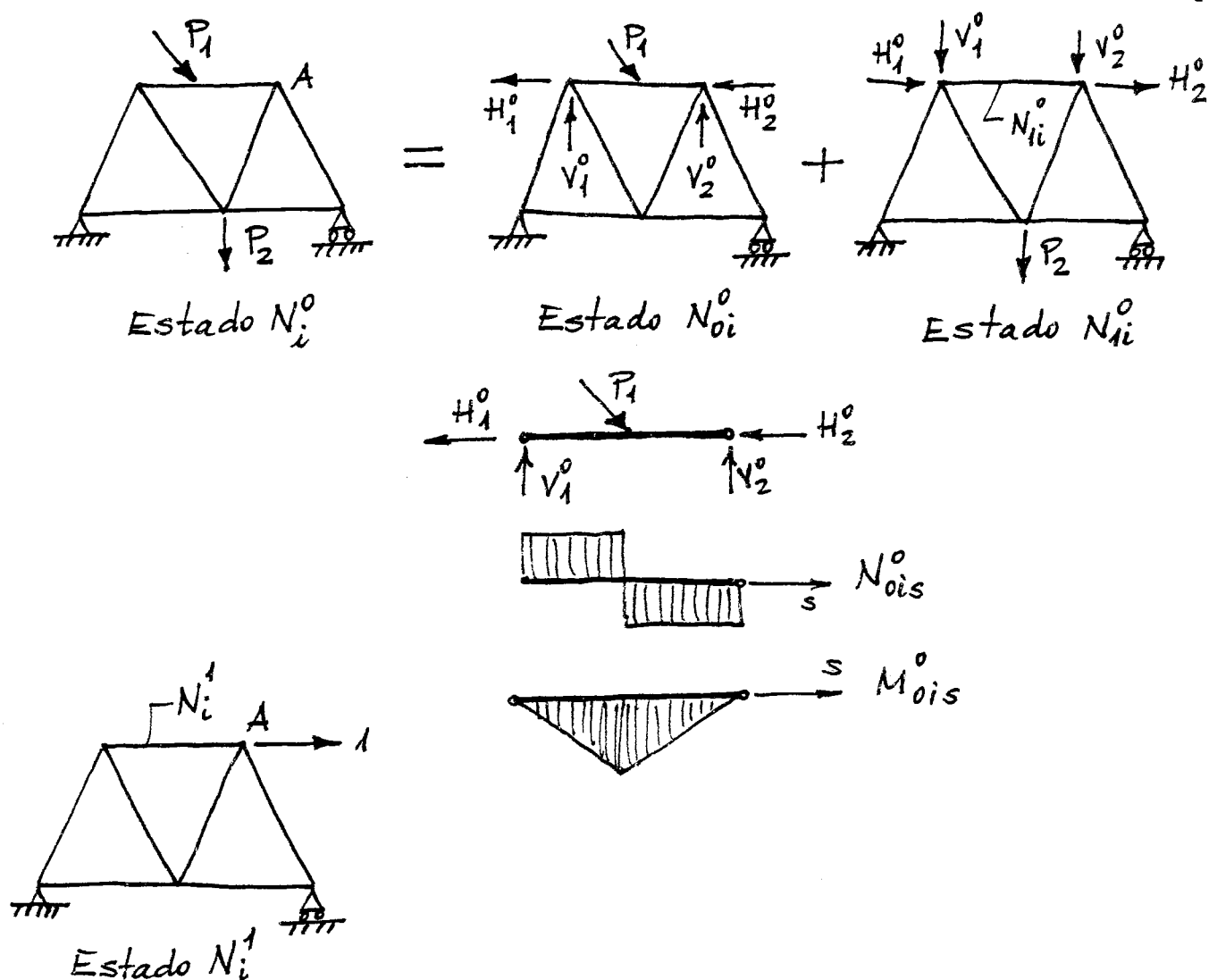


Figura 4.6.- Movimiento horizontal del nudo A.

La fórmula (4.10) se convierte, en este caso, en la siguiente:

$$r = \sum_{i \in I_2} \Delta_{ii}^0 N_i^1 + \sum_{i \in I_1} \left\{ \int_0^{L_i} \left(\frac{N_{ois}^0 + N_{li}^0}{E \Omega_s} + \epsilon_{ois} \right) N_i^1 ds + \int_0^{L_i} \left(\frac{M_{ois}^0}{EI_s} + k_{ois} \right) M_i^1 ds \right\}$$

$$\text{o bien } r = \sum_{i=1}^B \Delta_{ii}^0 N_i^1 \quad (4.14)$$

siendo Δ_{ii}^0 el alargamiento total de la barra i , que es suma de los tres alargamientos siguientes:

$$1) \text{ elástico } \Delta_{oi} = N_{li}^0 \int_0^{L_i} \frac{ds}{E \Omega_s} = N_{li}^0 L_i / E \Omega_i$$

$$2) \text{ impuesto inicial } \bar{\Delta}_{oi} = \int_0^{L_i} \epsilon_{ois} ds \text{ con } \epsilon_{ois} \text{ la deformación axil unitaria impuesta a la sección } s \text{ de la barra } i.$$

- 3) Por traslado de las cargas actuantes sobre barras a los nudos ex tremos (evidentemente sólo existe este alargamiento en las barras cargadas):

$$\bar{\Delta}_{0i} = \int_0^{L_i} \frac{N_{0is}^0}{E\Omega_s} ds$$

Conviene observar que si se efectúa el traslado de las cargas de ca da barra a los nudos de modo que las reacciones a considerar en el esta do N_{0i}^0 sean las de una viga biarticulada, el valor del alargamiento $\bar{\Delta}_{0i}$ es nulo.

El otro caso de cálculo que puede presentarse corresponde a la determinación del movimiento en una sección intermedia de una barra. Al igual que en el apartado 4.2 anterior (figura 4.4), el estado auxiliar 1 debe de calcularse en dos etapas l_0 y l_1 , resultando los esfuerzos siguien tes:

$N_i^1 = N_{li}^1$, si la barra i no está cargada con el influjo unidad.

$N_i^1 = N_{0is}^1 + N_{li}^1$, en caso contrario.

Aplicando la fórmula (4.10), de un modo análogo a los casos proceden tes se obtiene el resultado final:

$$r = \sum_{i \in I_1}^B \Delta_i^0 N_{li}^1 + \sum_{i \notin I_1} (N_{li}^0 \Delta_i^1) + r_0^0 \quad (4.15)$$

en donde $\Delta_i^0 = \Delta_{0i} + \bar{\Delta}_{0i} + \bar{\Delta}_{0i}$

$$\Delta_i^1 = \int_0^{L_i} \frac{N_{0is}^1}{E\Omega_s} ds$$

I_1 conjunto de barras sobre las que actúa el influjo unidad eficaz con el movimiento r .

r_0^0 representa el movimiento r producido por las acciones reales aplica das sobre las barras I_1 (fuerzas y deformaciones) más las reacciones isostáticas en los nudos, cuyas magnitudes contrarias se aplican al cálculo de los esfuerzos N_{li}^0 . Es decir:

$$r_0^0 = \int_0^L i \left(\frac{N_{0is}^0}{E\Omega_s} + \varepsilon_{0is} \right) N_{0is}^1 ds + \int_0^L i \left(\frac{M_{0is}^0}{EI_s} + k_{0is} \right) M_{0is}^1 ds$$

De nuevo, si se consideran las reacciones correspondientes a la barra biarticulada, la expresión (4.15) se simplifica, ya que $\Delta_i^1 = 0$ y $\bar{\Delta}_{0i} = 0$, y resulta de nuevo la ecuación (4.13):

$$r = \sum_{i=1}^B \Delta_i^0 N_{li}^1 + r_0^0 \quad (4.16)$$

Ejemplo 4.3.

Calcular el movimiento, según la dirección de 45° , de la sección central A de la barra 2-4 de la estructura representada en la figura 4.7. Todas las barras son de sección constante, de área $\Omega = 20 \text{ cm}^2$ e inercia $I = 50.000 \text{ cm}^4$. El módulo de elasticidad es de $2,0 \times 10^7 \text{ t.m}^{-2}$. No existen deformaciones iniciales en las barras.

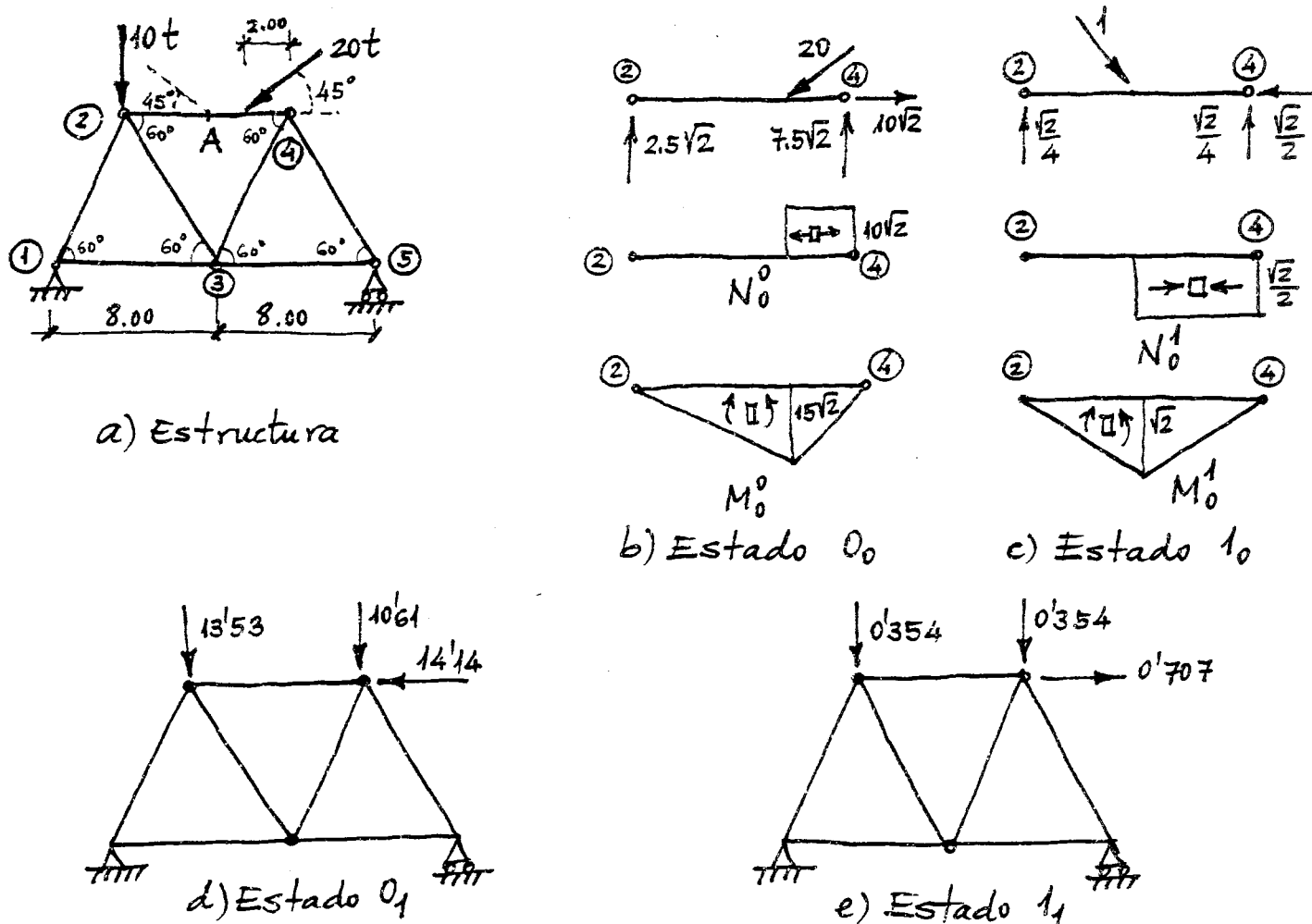


Figura 4.7.- Ejemplo 4.3.

SOLUCION:

El valor de r_0^0 se determina a partir de los diagramas (b) y (c) de la figura anterior, y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 r_0^0 &= \frac{1}{E\Omega} \int_0^8 N_{0is}^0 N_{0is}^1 ds + \frac{1}{EI} \int_0^8 M_{0is}^0 M_{0is}^1 ds = \\
 &= \frac{-1}{2 \times 10^7 \times 20 \times 10^{-4}} \times 10 \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 + \frac{1}{2 \times 10^7 \times 5 \times 10^4 \times 10^{-8}} \times \frac{220}{3} = \\
 &= -0,5 \times 10^{-3} + 7,33 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

$$r_0^0 = 0,68 \text{ cm.}$$

La tabla de cálculo es:

BARRA	$L_i/E\Omega_i$	N_{li}^0	N_{li}^1	$N_{li}^0 \cdot L_i/E\Omega_i \cdot N_{li}^1$
1-2	0,02	-21,86	-0,0546	0,0238
1-3	0,02	10,93	0,0273	0,0060
2-3	0,02	-7,92	0,3536	-0,0560
2-4	0,02	0,10	0,1495	0,0003
3-4	0,02	7,92	-0,3536	-0,0560
3-5	0,02	3,01	0,3898	0,0235
4-5	0,02	-6,02	-0,7618	0,0917
Σ				0,0333

Tabla 4.3.- Ejemplo 4.3.- Cálculo de movimientos.

Por otra parte:

$$\Delta_i^1 = \int_0^8 \frac{N_{0is}^1}{E\Omega_s} ds = \frac{-\sqrt{2}/2}{2 \times 10^7 \times 20 \times 10^{-4}} \times 4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times 10^{-4}$$

$$N_{li}^0 \cdot \Delta_i^1 = -0,10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10^{-4} = -0,0007 \text{ cm.}$$

(i = 2-4)

Por lo tanto:

$$r_A = 0,68 + 0,033 - 0,0007 = 0,71 \text{ cm.}$$

Se observa que en este caso el movimiento r_A se produce fundamentalmente por flexión de la barra 2-4.

4.4.- ESTRUCTURAS CON BARRAS CURVAS

Por conveniencia en la exposición se pueden considerar en este tipo de estructuras los siguientes casos: 1) Las cargas están aplicadas en los nudos y el movimiento a estudiar corresponde, asimismo, a un nudo. 2) Las cargas actúan tanto sobre barras como sobre nudos, pero los movimientos que se desean conocer corresponden a nudos. 3) Este caso se refiere a la situación más general, es decir, cargas situadas arbitrariamente en la estructura, y los movimientos a calcular son de cualquier punto -nudo de la estructura o sección de una barra-.

En el primer caso, el cálculo de la estructura inicial, es decir, la determinación de los esfuerzos N_i^0 , debe llevarse a cabo en dos fases como se ha indicado en el capítulo precedente (figura 4.8). En la primera, se obtienen en la estructura -con las barras curvas sustituidas por barras rectas que unen sus extremos- los esfuerzos N_{li}^0 , y en la segunda se deduce la variación de esfuerzos (axiles, cortantes y momentos) que aparece en las barras curvas por la aplicación de los esfuerzos determinados en la fase anterior, es decir, se puede resumir el cálculo del modo siguiente (figura 4.8-a).

a) Esfuerzos en barras rectas:

$$N_i^0 = N_{li}^0 \quad (\text{no existen momentos flectores ni esfuerzos cortantes})$$

b) Esfuerzos en barras curvas:

$$N_i^0 = N_{li}^0 \cos \alpha$$

$$Q_i^0 = -N_{li}^0 \sin \alpha$$

$$M_i^0 = N_{li}^0 e$$

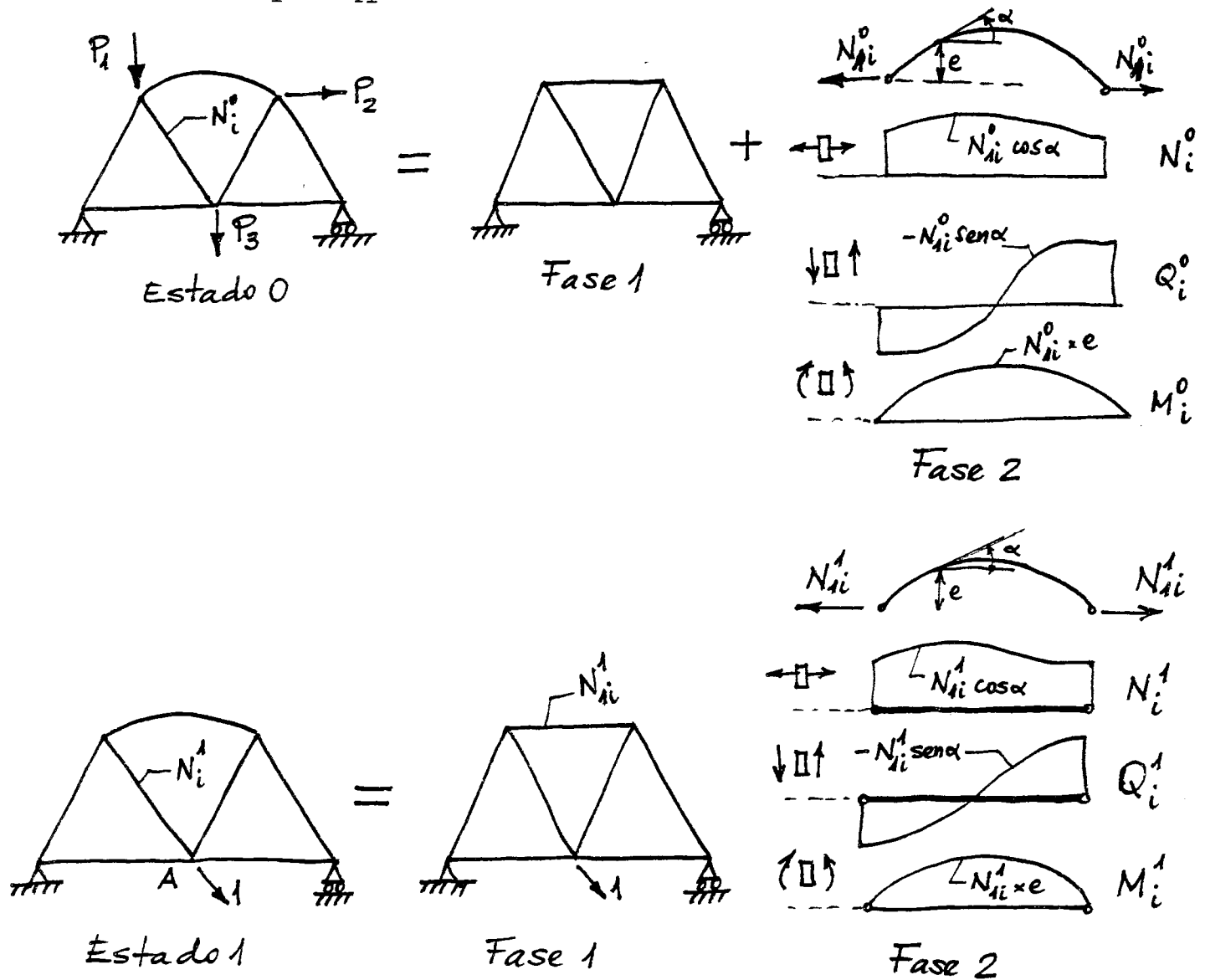


Figura 4.8.- Estructuras con barras curvas.

De un modo semejante, los esfuerzos en el estado auxiliar correspondiente a un influjo unidad eficaz con el movimiento que se desea conocer, se obtienen como suma de las dos fases que se muestran en la figura 4.8-b, es decir:

a) Esfuerzos en barras rectas.

$$N_i^1 = N_{li}^1 \quad (\text{no existen momentos flectores ni esfuerzos cortantes})$$

b) Esfuerzos en barras curvas.

$$N_i^1 = N_{li}^1 \cdot \cos \alpha$$

$$Q_i^1 = -N_{li}^1 \cdot \sin \alpha$$

$$M_i^1 = N_{li}^1 \cdot e$$

Aplicando la fórmula (4.9) se puede obtener para el movimiento eficaz con el influjo unidad del estado 1, la expresión siguiente (se desprecia la deformación por cortante):

$$\begin{aligned} r = \sum_{i \in I_r} (N_{li}^0 \frac{L_i}{E\Omega_i} + \bar{\Delta}_{0i}) N_{li}^1 + \sum_{i \in I_c} \{ \int_0^{L_i} (\frac{N_{li}^0 \cdot \cos \alpha}{E\Omega_s} + \epsilon_{0is}) N_{li}^0 \cos \alpha \cdot ds + \\ + \int_0^{L_i} (\frac{N_{li}^0 \cdot e}{EI_s} + k_{0is}) N_{li}^1 \cdot e \cdot ds \} \end{aligned} \quad (4.17)$$

siendo I_r e I_c los conjuntos de barras rectas y curvas, respectivamente; ϵ_{0is} y k_{0is} son las deformaciones axil y de flexión impuestas inicialmente a lo largo de cada una de las barras curvas, y $\bar{\Delta}_{0i}$ las deformaciones axiles impuestas inicialmente en las barras rectas.

La fórmula (4.17) puede escribirse del modo siguiente:

$$r = \sum_{i=1}^B \{ N_{li}^0 (\frac{L_i}{E\Omega_i}) + \bar{\Delta}_{0i} \} N_{li}^1 \quad (4.18)$$

$$\text{en donde } \frac{L_i}{E\Omega_i} = \int_0^{L_i} (\frac{\cos^2 \alpha}{E\Omega_s} + \frac{e^2}{EI_s}) ds$$

$$\text{y } \bar{\Delta}_{0i} = \int_0^{L_i} \epsilon_{0is} \cdot \cos \alpha \cdot ds + \int_0^{L_i} k_{0is} \cdot e \cdot ds$$

representan respectivamente, la elongabilidad equivalente y el movimiento relativo entre los nudos extremos de una barra curva genérica i (se observa que incluyen las definiciones correspondientes a las barras rectas, dadas previamente, considerando que en éstas $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ y $e = 0$).

Ejemplo 4.4.

Determinar la elongabilidad equivalente de una barra curva de directriz circular de radio R y ángulo central 2ψ . Las características de la sección transversal son constantes y de valores Ω_s (área) e I_s (inercia). El módulo de elasticidad es E . (Figura 4.9).

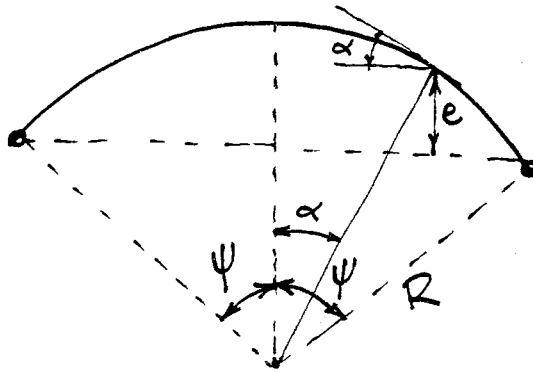


Figura 4.9.- Barra circular.

La elongabilidad tiene como expresión:

$$\frac{L}{E\Omega} = \int_{-\psi}^{\psi} \left\{ \frac{\cos^2 \alpha}{E\Omega} + \frac{R^2 (\cos \alpha - \cos \psi)^2}{EI} \right\} R d\alpha$$

es decir:

$$\frac{L}{E\Omega} = \frac{R}{E\Omega} (\psi + \sin \psi \cdot \cos \psi) + \frac{R^3}{EI} (\psi - 3 \sin \psi \cdot \cos \psi + 2 \psi \cdot \cos^2 \psi)$$

Una generalización del caso estudiado anteriormente corresponde a la situación de cargas actuando sobre barras. Ahora los esfuerzos del esta-

do inicial -se prescinde de los cortantes por no producir deformaciones- son los siguientes:

Barras rectas:

$$N_i^0 = N_{0is}^0 + N_{li}^0$$

$$M_i^0 = M_{0is}^0$$

Barras curvas:

$$N_i^0 = N_{0is}^0 + N_{li}^0 \cos \alpha$$

$$M_i^0 = M_{0is}^0 + N_{li}^0 \cdot e$$

en donde los índices y superíndices tienen la significación usual.

La fórmula (4.9) se convierte, en este caso, en la siguiente:

$$r = \sum_{i=1}^B (N_{li}^0 \frac{L_i}{E\Omega_i} + \bar{\Delta}_{0i} + \bar{\bar{\Delta}}_{0i}) N_{li}^1$$

con $\frac{L_i}{E\Omega_i} = \int_0^{L_i} (\frac{\cos^2 \alpha}{E\Omega_s} + \frac{e^2}{EI_s}) ds$

$$\Delta_{0i} = N_{li}^0 \cdot \frac{L_i}{E\Omega_i}$$

$$\bar{\Delta}_{0i} = \int_0^{L_i} \epsilon_{0is} \cdot \cos \alpha \cdot ds + \int_0^{L_i} k_{0is} \cdot e \cdot ds$$

$$\bar{\bar{\Delta}}_{0i} = \int_0^{L_i} \frac{N_{0is}^0}{E\Omega_s} \cos \alpha \cdot ds + \int_0^{L_i} \frac{M_{0is}^0}{EI_s} e \cdot ds$$

Δ_{0i} es el alargamiento elástico (debido a los esfuerzos).

$\bar{\Delta}_{0i}$ representa el movimiento (alargamiento) relativo entre los extremos de la barra, producido por las deformaciones iniciales.

$\bar{\Delta}_{0i}$ corresponde al movimiento relativo entre los extremos de la barra, bajo la actuación de las cargas directamente aplicadas y las reacciones (opuestas a las fuerzas equivalentes aplicadas a los nudos de la estructura en el estado 0_1).

Por último, se considera el caso general de cargas actuando sobre nudos y barras, y el movimiento a calcular correspondiente a una sección intermedia de una barra. En este caso se obtiene, para cada uno de los estados de cálculo:

Estado 0 (bajo las cargas reales de la estructura):

$$N_i^0 = N_{0is}^0 + N_{li}^0 \cdot \cos \alpha$$

$$M_i^0 = M_{0is}^0 + N_{li}^0 \cdot e$$

Estado 1 (bajo la acción del influjo unidad eficaz con el movimiento):

$$N_i^1 = N_{0is}^1 + N_{li}^1 \cdot \cos \alpha$$

$$M_i^1 = M_{0is}^1 + N_{li}^1 \cdot e$$

Se han considerado todas las barras curvas, ya que el caso particular de barra recta corresponde a $\cos \alpha = 1$ y $e = 0$. El significado de los subíndices y superíndices es el de los apartados anteriores.

La fórmula (4.9) se transforma en la siguiente:

$$r = \sum_{i=1}^B \Delta_i^0 N_{li}^1 + \sum_{i \in I_1} (N_{li}^0 \Delta_i^1) + r_0^0 \quad (4.19-a)$$

$$\text{con } \Delta_i^0 = \Delta_{0i} + \bar{\Delta}_{0i} + \bar{\bar{\Delta}}_{0i}$$

$$\Delta_{0i} = N_{li}^0 \frac{L_i}{E\Omega_i} = N_{li}^0 \int_0^{L_i} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{E\Omega_s} + \frac{e^2}{EI_s} \right) ds$$

$$\bar{\Delta}_{0i} = \int_0^{L_i} (\epsilon_{0is} \cos \alpha + k_{0is} \cdot e) ds$$

$$\bar{\Delta}_{0i} = \int_0^{L_i} \left(\frac{N_{0is}^0}{E\Omega_s} \cos \alpha + \frac{M_{0is}^0}{EI_s} e \right) ds \quad (4.19-b)$$

$$\Delta_i^1 = \int_0^{L_i} \left(\frac{N_{0is}^1}{E\Omega_s} \cos \alpha + \frac{M_{0is}^1}{EI_s} e \right) ds$$

$$r_0^0 = \int_0^{L_i} \left\{ \left(\frac{N_{0is}^0}{E\Omega_s} + \epsilon_{0is} \right) N_{0is}^1 + \left(\frac{M_{0is}^0}{EI_s} + k_{0is} \right) M_{0is}^1 \right\} ds$$

I_1 es el conjunto de barras sobre las que actúa el influjo unidad eficaz con el movimiento r .

La fórmula (4.19) es la más general e incluye a todas las anteriores.

Si las fuerzas que actúan en los estados 0 y 1 se descomponen de forma tal que las reacciones correspondan a las de una barra biarticulada en sus extremos, en ese caso los valores de $\bar{\Delta}_{0i}$ y Δ_i^1 son nulos.

Ejemplo 4.5.

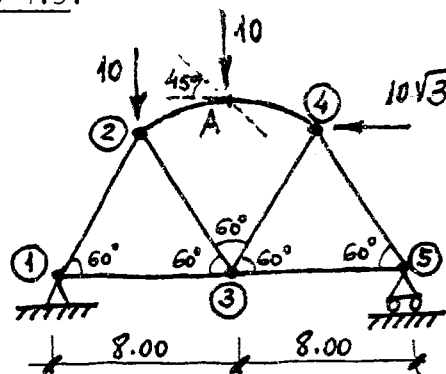
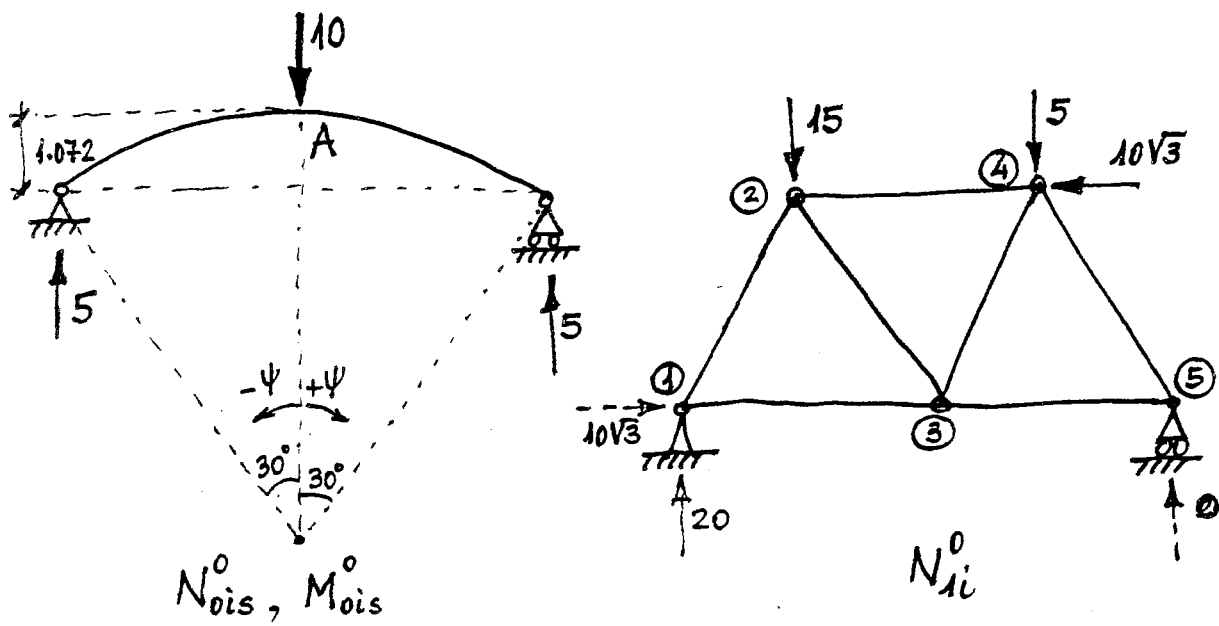
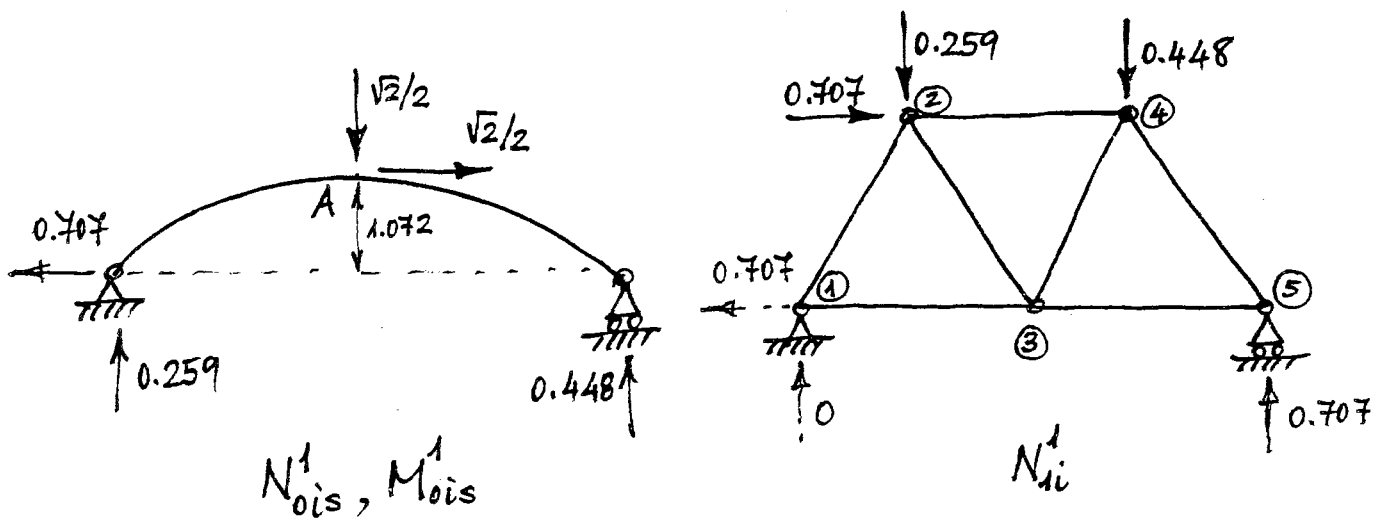


Figura 4.10.- Ejemplo 4.5.

Hallar el movimiento del punto A, según la dirección de 45° , en la estructura representada en la figura 4.10. La barra 2-4 es circular, de radio 8 m, con sección transversal de área $\Omega = 20 \text{ cm}^2$ e inercia $I = 50.000 \text{ cm}^4$. La sección de las restantes barras es $\Omega = 20 \text{ cm}^2$. El módu-



a) Estado 0



b) Estado 1

Figura 4.11.- Ejemplo 4.5.- Descomposición de las cargas que actúan sobre barras.

lo de elasticidad del material de todas las barras es $E = 2 \cdot 10^7 \text{ tm}^{-2}$. No existen deformaciones iniciales en las barras.

SOLUCION:

$$\text{Barras rectas: } \frac{L}{E\Omega} = \frac{800}{2 \times 10^7 \times 20 \times 10^{-4}} = 0,02 \text{ cm/t.}$$

Barra curva:

$$\begin{aligned} \frac{L}{E\Omega} &= 0,02 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{8^3 \times 10^6}{2 \times 10^3 \times 50 \times 10^3} \left\{ \frac{\pi}{6} - 3 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \frac{\pi}{6} \times \frac{3}{4} \right\} = \\ &= 0,0191 + 0,0510 = 0,07 \text{ cm/t.} \end{aligned}$$

Los diferentes estados de cálculo, correspondientes a las descomposiciones de cargas en barras por sus cargas equivalentes en nudos, se muestran en la figura 4.11.

Las leyes de esfuerzos en la barra circular en ambos estados de carga son las siguientes:

$$N_{0is}^0 = \begin{cases} 5 \text{sen}\psi & \text{en } 2-A \\ -5 \text{sen}\psi & \text{en } A-4 \end{cases} \quad M_{0is}^0 = \begin{cases} 40 \left(\frac{1}{2} + \text{sen}\psi \right) & \text{en } 2-A \\ 40 \left(\frac{1}{2} - \text{sen}\psi \right) & \text{en } A-4 \end{cases}$$

$$N_{0is}^1 = \begin{cases} 0,259 \text{sen}\psi + 0,707 \cos\psi & \text{en } 2-A \\ -0,448 \text{sen}\psi & \text{en } A-4 \end{cases}$$

$$M_{0is}^1 = \begin{cases} 8 \cdot 0,259 \left(\frac{1}{2} + \text{sen}\psi \right) + 8 \cdot 0,707 \left(\cos\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & \text{en } 2-A \\ 8 \cdot 0,448 \left(\frac{1}{2} - \text{sen}\psi \right) & \text{en } A-4 \end{cases}$$

Los esfuerzos N_{li}^0 y N_{li}^1 , obtenidos mediante el método gráfico de Cremona, aparecen reflejados en la tabla 4.4.

Para la barra curva, se tiene: $E\Omega = 2 \times 10^7 \times 20 \times 10^{-4} = 4 \times 10^4 \text{ t}$
 $EI = 2 \times 10^7 \times 5 \times 10^4 \times 10^{-8} = 10^4 \text{ tm}^{-2}$

Por lo tanto:

$$\bar{\Delta}_{0i} = \int_0^{L_i} \left\{ \frac{N_{0is}^0}{E\Omega_s} \cos \alpha + \frac{M_{0is}^0}{EI_s} e \right\} ds, \quad \text{es decir:}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{0i} &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{40 \sin \psi \cos \psi}{4 \times 10^4} d\psi + \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 64 \frac{20 + 40 \sin \psi}{10^4} \left(\cos \psi - \frac{1}{2} \right) d\psi + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{40 \sin \psi \cos \psi}{4 \times 10^4} d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{6}} 64 \frac{20 - 40 \sin \psi}{10^4} \left(\cos \psi - \frac{1}{2} \right) d\psi = 2 \times 155.17 \times 10^{-4} \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\bar{\Delta}_{0i} = 3,103 \text{ cm.}$$

cm/t				cm						
BARRA	$L_i/E\Omega_i$	N_{li}^0	N_{li}^1	Δ_{0i}	$\bar{\Delta}_{0i}$	$\bar{\Delta}_{0i}$	Δ_i^0	Δ_{li}^0	Δ_i^1	Δ_{li}^1
1-2	0,02	-23,00	0	-0,460	0	0	-0,460	0	0	0
1-3	0,02	-5,75	0,707	-0,115	0	0	-0,115	-0,081	0	0
2-3	0,02	5,75	-0,300	0,115	0	0	0,115	-0,035	0	0
2-4	0,07	-14,40	-0,56	-1,008	0	3,103	2,095	-1,173	0,084	-1,210
3-4	0,02	-5,75	0,300	-0,115	0	0	-0,115	-0,035	0	0
3-5	0,02	0	0,400	0	0	0	0	0	0	0
4-5	0,02	0	-0,810	0	0	0	0	0	0	0
Σ								-1,324		-1,210

Tabla 4.4.- Ejemplo 4.5.- Cálculo de movimientos.

$$\Delta_i^1 = \int_0^{L_i} \left\{ \frac{N_{0is}^1}{E\Omega_s} \cos \alpha + \frac{M_{0is}^1}{EI_s} e \right\} ds, \quad \text{es decir:}$$

$$\begin{aligned} \Delta_i^1 &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (0,259 \sin \psi + 0,707 \cos \psi) \cos \psi \frac{8d\psi}{4 \times 10^4} + \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \{ 2,072 (0,5 + \sin \psi) + \\ &+ 5,656 (\cos \psi - 0,866) \} \frac{\cos \psi - 0,5}{10^4} 8d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{6}} -0,448 \sin \psi \cos \psi \frac{8d\psi}{4 \times 10^4} + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3,584 (0,5 - \sin \psi) (\cos \psi - 0,5) \frac{8d\psi}{10^4} = 8,405 \times 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\Delta_i^1 = 0,084 \text{ cm.}$$

y, por último:

$$r_0^0 = \int_0^{L_i} \frac{N_{0is}^0}{E\Omega_s} N_{0is}^1 ds + \int_0^{L_i} \frac{M_{0is}^0}{EI_s} M_{0is}^1 ds$$

o sea:

$$\begin{aligned} r_0^0 = & \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 5 \operatorname{sen} \psi (0,259 \operatorname{sen} \psi + 0,707 \cos \psi) \frac{8 d\psi}{4 \times 10^{-4}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} 5 \times 0,448 \operatorname{sen}^2 \psi \frac{8 d\psi}{4 \times 10^{-4}} + \\ & + \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (20 + 40 \operatorname{sen} \psi) (2,072 \operatorname{sen} \psi + 5,656 \cos \psi - 3,862) \frac{8 d\psi}{10^4} + \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (20 - 40 \operatorname{sen} \psi) (1,792 - 3,584 \operatorname{sen} \psi) \frac{8 d\psi}{10^4} = 425,288 \times 10^{-4} \text{ m.} \end{aligned}$$

$$r_0^0 = 4.253 \text{ cm.}$$

Así pues, la flecha es:

$$r = -1.324 - 1.210 + 4.253 = 1,72 \text{ cm.}$$

4.5.- GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE BARRA

Los resultados de los apartados anteriores pueden aplicarse a una estructura compuesta de subestructuras, en donde cada una de ellas se una con el resto de la estructura general mediante dos nudos únicamente (figura 4.12).

En este caso, la determinación del movimiento de un nudo sigue la pauta anteriormente indicada (figura 4.13), generalizando los conceptos de elongabilidad, deformaciones iniciales impuestas y deformaciones debidas al traslado de las cargas, como se muestra a continuación:

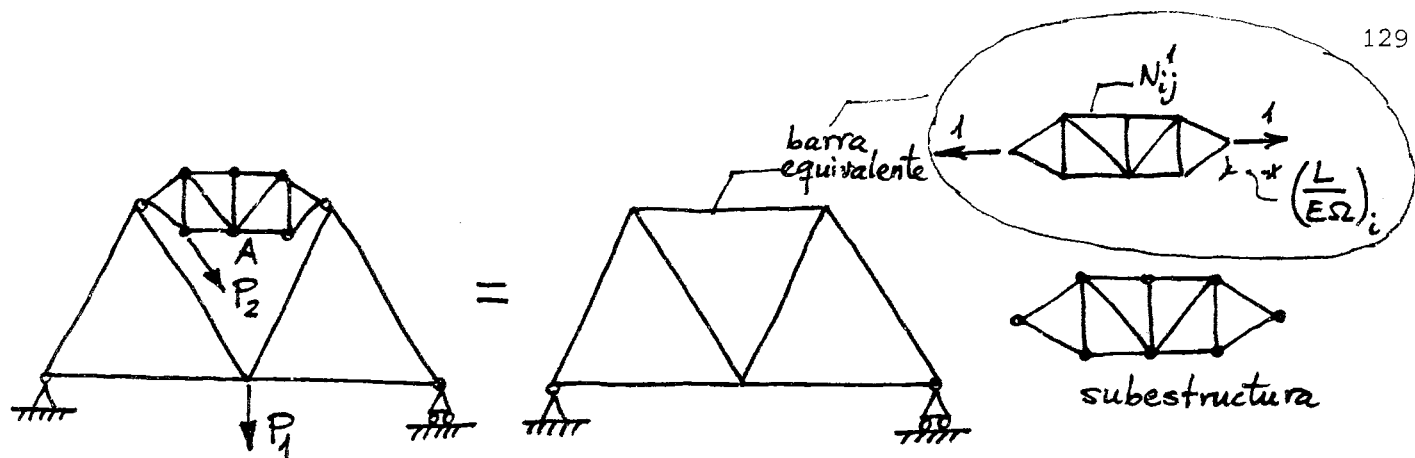


Figura 4.12.- Estructura compuesta de subestructuras.

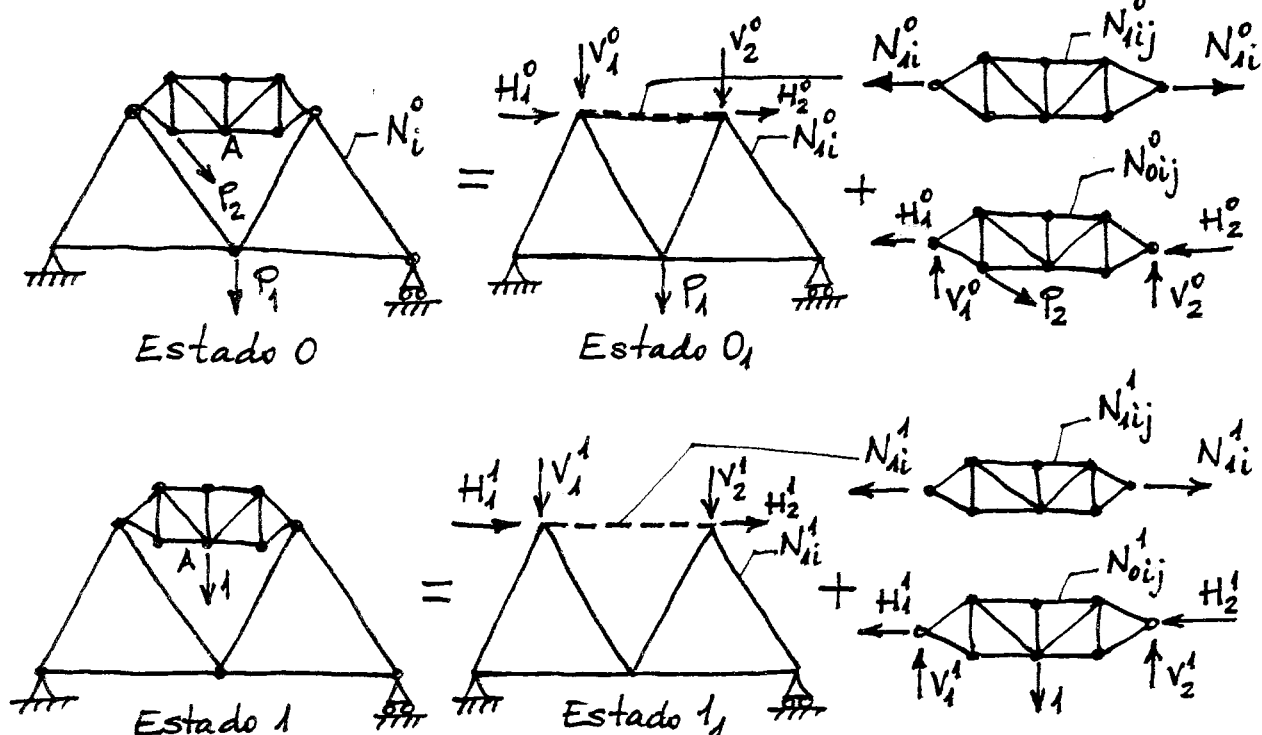


Figura 4.13.- Determinación del movimiento vertical del nudo A.

Para la obtención del movimiento r es necesario el cálculo de esfuerzos en dos estados: En el primero actúan todas las fuerzas y deformaciones reales. El segundo estado corresponde a la acción del influjo unidad eficaz con el movimiento r . Se deduce así, tras la aplicación de la fórmula (4.9), la siguiente expresión general:

$$r = \sum_{i=1}^B \Delta_i^0 N_{li}^1 + \sum_{i \in I_1} (N_{li}^0 \Delta_i^1) + r_0 \quad (4.20)$$

en donde: N_{li}^0 y N_{li}^1 son los esfuerzos que se producen en las barras de la estructura, sustituyendo las barras curvas y subestructuras por barras rectas que unen sus extremos.

Δ_i^0 es la deformación total de la barra i , cuya expresión es

$$\Delta_i^0 = \Delta_{0i} + \bar{\Delta}_{0i} + \bar{\bar{\Delta}}_{0i}$$

Estas expresiones para las barras curvas han sido dadas en (4.19a), mientras que para las barras equivalentes a las subestructuras son:

$$\Delta_{0i} = N_{1i}^0 \frac{L_i}{E\Omega_i} \quad (\text{deformación elástica})$$

en donde la elongabilidad equivalente se define como:

$$\frac{L_i}{E\Omega_i} = \frac{B_i}{\sum_{j=1}^{B_i} \Delta_{1j}^1 \cdot N_{ij}^1} = \frac{B_i}{\sum_{j=1}^{B_i} (N_{ij}^1)^2} \frac{L_{ij}}{E\Omega_{ij}}$$

con B_i el número de barras de la subestructura i , N_{ij}^1 el esfuerzo que aparece en la barra j de dicha subestructura bajo la acción de un axil unidad (dos fuerzas opuestas aplicadas en los nudos extremos de la subestructura y en la dirección de la recta que los une).

$\Delta_{ij}^1 = N_{ij}^1 \cdot L_{ij} / E\Omega_{ij}$ es la deformación elástica correspondiente de la barra (figura 4.12).

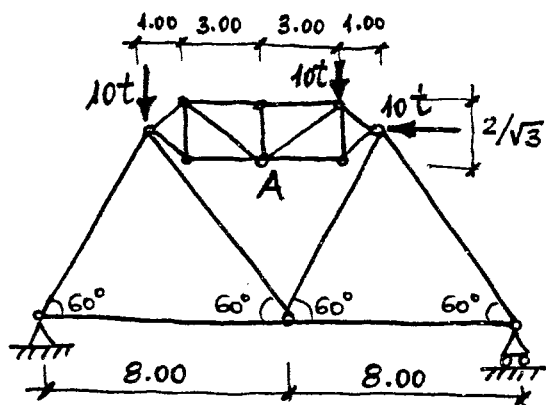
$$\bar{\Delta}_{0i} = \sum_{j=1}^{B_i} \epsilon_{0ij} \cdot L_{ij} \cdot N_{ij}^1 \quad (\text{deformación inicial})$$

$$\bar{\Delta}_{0i} = \sum_{j=1}^{B_i} (N_{0ij}^0 / E\Omega_{ij}) \cdot L_{ij} \cdot N_{ij}^1 \quad (\text{deformación debida al traslado de las fuerzas equivalentes a los nudos extremos de la subestructura})$$

$$\Delta_i^1 = \sum_{j=1}^{B_i} (N_{0ij}^1 / E\Omega_{ij}) \cdot L_{ij} \cdot N_{ij}^1 \quad (\text{deformación debida al traslado del influjo unidad o los nudos extremos de la subestructura})$$

r_0^0 es el movimiento r debido a las acciones reales actuando en las barras I_1 , supuestas sustentadas por las reacciones cuyos valores opuestos han servido para el cálculo de los esfuerzos N_{1i}^0 . El conjunto de barras I_1 corresponde a aquéllas en las que se aplica el influjo unidad.

Ejemplo 4.6.



$$E = 2 \times 10^7 \text{ tm}^{-2}.$$

$\Omega = 10 \text{ cm}^2$ en todas las barras de la subestructura.

$\Omega = 20 \text{ cm}^2$ en las barras restantes.

Figura 4.14.- Ejemplo 4.6.

Obtener el movimiento vertical del nudo A de la celosía representada en la figura anterior.

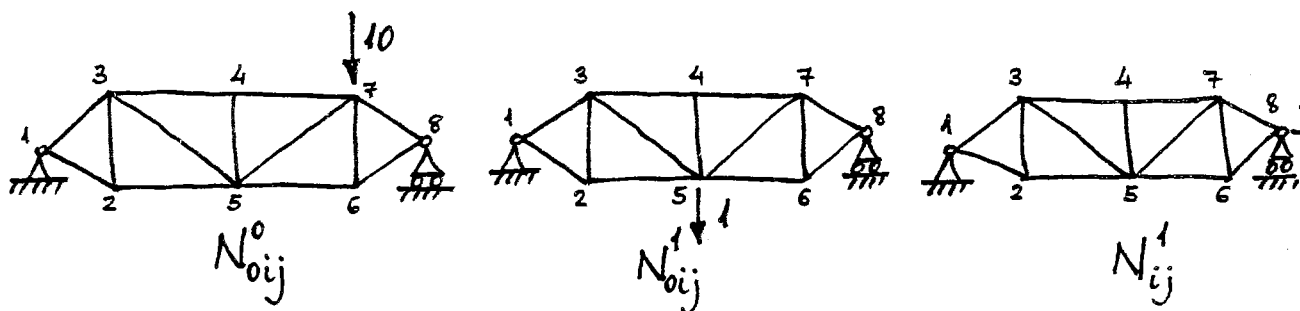
SOLUCION:

Figura 4.15.- Subestructura: Estados auxiliares.

En la figura 4.15 se muestran los estados auxiliares necesarios para sustituir la subestructura por una barra equivalente que una sus nudos extremos 1 y 8.

Los diferentes resultados del cálculo de la subestructura se incluyen en la tabla 4.5.

La elongabilidad equivalente de la subestructura es:

$$\frac{L_i}{E\Omega_i} = 236.554 \times 10^{-4} \text{ cm/t.}$$

BARRA	m	t	^(a) cm/t(10 ⁻⁴)	^(b)	^(c)	^(d)	^(e) cm/t(10 ⁻⁴)	x10 ⁻⁴	x10 ⁻⁴	x10 ⁻⁴	x10 ⁻⁴
	L _{ij}	EΩ _{ij}	L _{ij} /EΩ _{ij}	N ⁰ _{0ij}	N ¹ _{0ij}	N ¹ _{ij}	^(a) x ^(d)	^(b) x ^(e)	^(c) x ^(e)	^(d) x ^(e)	^(a) x ^(b) x ^(c)
1-2	1.155	2x10 ⁴	57.75	1.25	0.50	0.577	33.322	41.653	16.661	19.227	36.094
1-3	1.155	2x10 ⁴	57.75	-1.25	-0.50	0.577	33.322	-41.653	-16.661	19.227	36.094
2-3	1.155	2x10 ⁴	57.75	-0.62	-0.25	-0.289	-16.690	10.348	4.173	4.823	8.951
2-5	3.000	2x10 ⁴	150.00	1.08	0.43	0.50	75.000	81.000	32.250	37.500	69.660
3-4	3.000	2x10 ⁴	150.00	-4.41	-1.80	0.50	75.000	-330.750	-135.000	37.500	1190.700
3-5	3.215	2x10 ⁴	160.75	3.55	1.45	0	0.000	0.000	0.000	0.000	827.461
4-5	1.155	2x10 ⁴	57.75	0	0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00
4-7	3.000	2x10 ⁴	150.00	-4.41	-1.80	0.50	75.000	-330.750	-135.000	37.500	1190.700
5-6	3.000	2x10 ⁴	150.00	7.52	0.43	0.50	75.000	564.000	32.250	37.500	485.040
5-7	3.215	2x10 ⁴	160.75	-3.34	1.45	0	0.000	0.000	0.000	0.000	-778.512
6-7	1.155	2x10 ⁴	57.75	-4.33	-0.25	-0.289	-16.690	72.268	4.173	4.823	62.514
6-8	1.155	2x10 ⁴	57.75	8.75	0.50	0.577	33.322	291.568	16.661	19.227	252.656
7-8	1.155	2x10 ⁴	57.75	-8.75	-0.50	0.577	33.322	-291.568	-16.661	19.227	252.656
Σ								66.116	-197.154	236.554	3634.014

TABLA 4.5.- Subestructura. Cálculos auxiliares.

Además:

$$\bar{\Delta}_{0i} = 0 ; \quad \bar{\Delta}_{0i} = 66.116 \times 10^{-4} ; \quad \Delta_i^1 = -197.154 \times 10^{-4}$$

$$r_0^0 = 3634.014 \times 10^{-4} \text{ cm.}$$

Los estados de cálculo en la estructura global se representan en la figura 4.16.

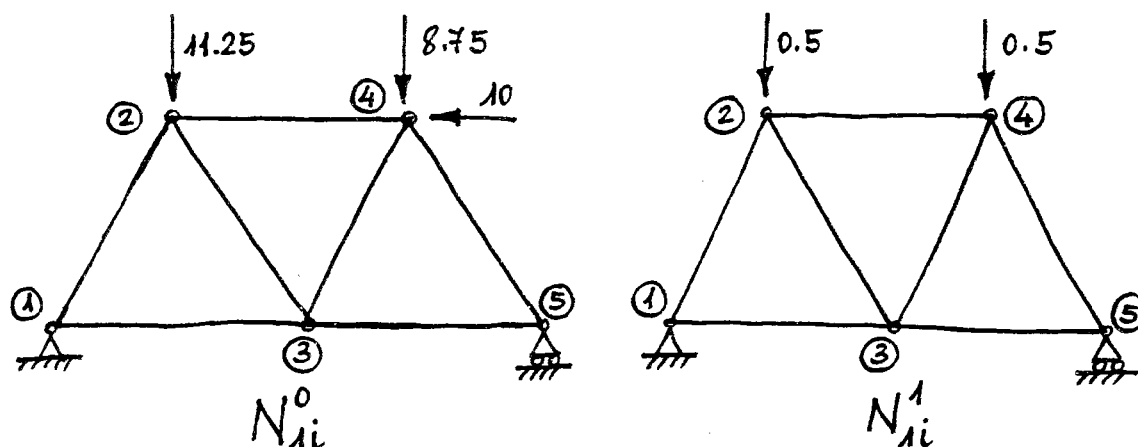


Figura 4.16.- Estructura global. Estados de cálculo.

y los resultados se agrupan en la tabla 4.6.

BARRA	(a) cm/t(10 ⁻⁴)	(b) t	(c) (10 ⁻⁴)	(10 ⁻⁴) (a)x(b)	(d) 10 ⁻⁴ cm(10 ⁻⁴)	(e) (10 ⁻⁴) x10 ⁻⁴	(10 ⁻⁴) (10 ⁻⁴) x10 ⁻⁴	(10 ⁻⁴) (10 ⁻⁴) x10 ⁻⁴	(c)x(d)	(b)x(e)
1-2	200	-17.25	-0.58	-3450.0	0	0	-3450	0	2001.00	0
1-3	200	-1.50	0.29	-300.0	0	0	-300	0	-87.00	0
2-3	200	4.25	0.00	850.0	0	0	850	0	0.00	0
2-4	236.554	-10.75	-0.29	-2543.0	0	66.116	-2477	-197.15	718.33	2119.36
3-4	200	-4.25	0	-850.0	0	0	-850	0	0.00	0
3-5	200	2.75	0.29	550.0	0	0	550	0	159.50	0
4-5	200	-5.75	-0.58	-1150.0	0	0	-1150	0	667.00	0
Σ									3458.83x10 ⁻⁴	2119.36x10 ⁻⁴

TABLA 4.6.- Ejemplo 4.6. Resultados

Por lo tanto, $r = (3458.83 + 2119.36 + 3634.01) \times 10^{-4}$ cm.

$$r = 0.92 \text{ cm.}$$

4.6. DETERMINACION GRAFICA DE MOVIMIENTOS

4.6.1. Introducción

El método de cálculo de movimientos en una estructura articulada que se ha descrito en los apartados anteriores exige, para cada movimiento, la obtención de los esfuerzos N_i^1 de su correspondiente estado auxiliar. En muchos casos -en los que se necesita conocer todos o la mayoría de los movimientos de una estructura, o bien su deformada- puede ser más interesante proceder a su deducción de un modo gráfico mediante un procedimiento debido a Williot.

En ese método se supone que se conocen los movimientos relativos entre los extremos de las barras (o deformaciones totales), Δ_i^0 , debidos a las acciones exteriores, es decir, obtenidos mediante la suma de las deformaciones elásticas, iniciales y de traslado de las cargas en las barras a los nudos: $\Delta_i^0 = \Delta_{0i} + \bar{\Delta}_{0i} + \bar{\Delta}_{0i}$.

A efectos de introducir el método de Williot, se considera el siguiente sencillo problema (figura 4.17):

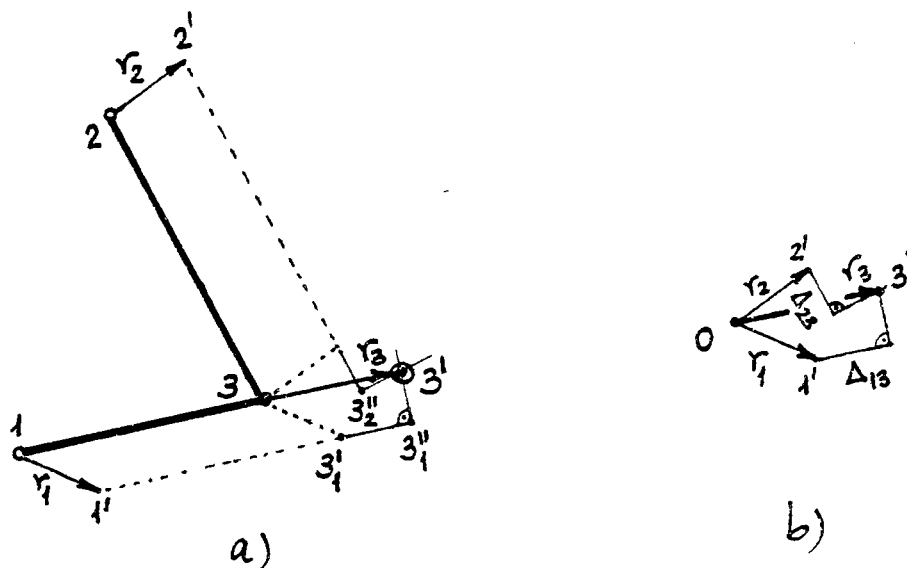


Figura 4.17.- Diagrama de Williot.

Se conocen los movimientos de dos nudos 1 y 2 (\bar{r}_1 y \bar{r}_2) y se pretende determinar el movimiento \bar{r}_3 de otro nudo 3, unido a los anteriores por sendas barras con alargamientos totales Δ_{1-3}^0 y Δ_{2-3}^0 .

La obtención del movimiento r_3 se deduce según el esquema de la figura 4.17(a). Allí se sitúan primeramente las posiciones deformadas de los nudos 1 y 2, que se designan por 1' y 2' respectivamente. Las barras 1-3 y 2-3 se trasladan a las posiciones 1'-3'₁ y 2'-3'₂, y se les añaden las deformaciones finales conocidas Δ_{1-3}^0 y Δ_{2-3}^0 -que en la figura se suponen alargamientos-, lo que da origen a dos posiciones del nudo 3, designadas por 3''₁ y 3''₂. Las barras pueden girar, sin modificar sus longitudes deformadas, alrededor de los nudos 2 y 3 -en sus posiciones finales 2' y 3'-, de modo que el movimiento del nudo 3 sea único. Dada la hipótesis de linealidad del cálculo que se ha admitido, los arcos de circunferencia 3''₁-3' y 3''₂-3' son rectas normales a los radios o direcciones de las barras 1-3 y 2-3. De este modo se deduce el movimiento del nudo 3. Es conveniente realizar esta construcción según se indica en la figura 4.17(b), en donde las posiciones reales de los nudos y barras de la estructura no se representan, y sí solamente los movimientos y deformaciones, por lo que puede usarse una escala superior y conseguir una mayor claridad en el dibujo. Este diagrama se denomina de Williot, y en él se representan los movimientos conocidos, r_1 y r_2 , referidos a un origen común 0; a partir de sus extremos se suman los alargamientos de las barras Δ_{1-3}^0 y Δ_{2-3}^0 , según la dirección de la barra respectiva, y con sentido del nudo conocido al desconocido, si es alargamiento y al contrario, si es acortamiento. Las perpendiculares por los extremos de estos alargamientos determinan unívocamente el movimiento del nudo 3, es decir $\bar{r}_3 = \overline{03}$.

Utilizando de un modo reiterado la construcción anterior, es posible determinar gráficamente los movimientos de una estructura articulada. Se consideran a continuación varios casos.

4.6.2.- Giro de una barra y movimiento de uno de sus nudos extremos conocidos

La estructura de la figura 4.18 corresponde a este caso, y su deformada se determina mediante aplicación sucesiva de la construcción de Williot.

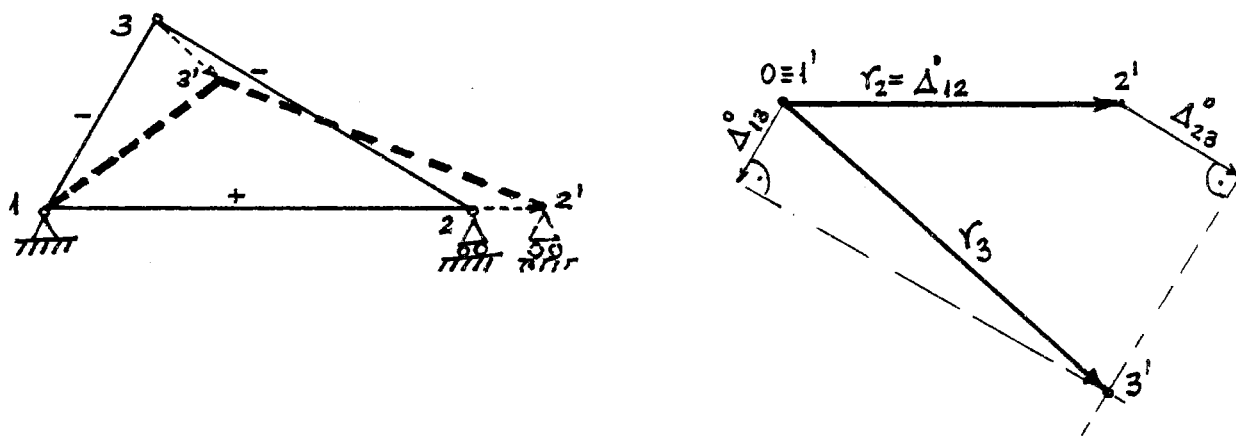


Figura 4.18.- Estructura con movimiento del nudo 1 (nulo) y barra 1-2 sin giro.

Ejemplo 4.7.

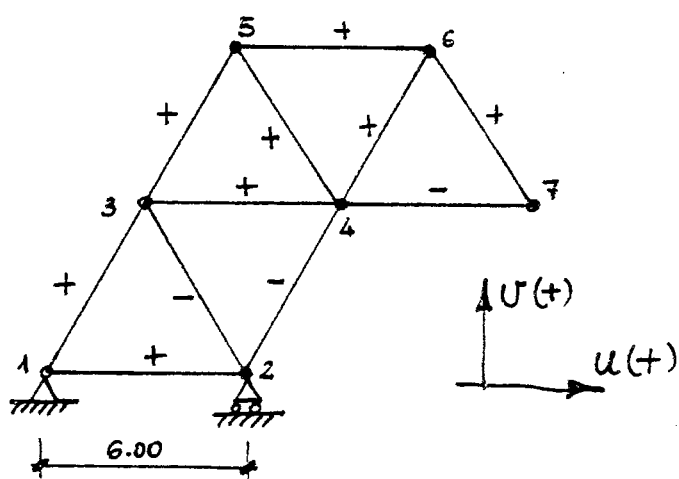
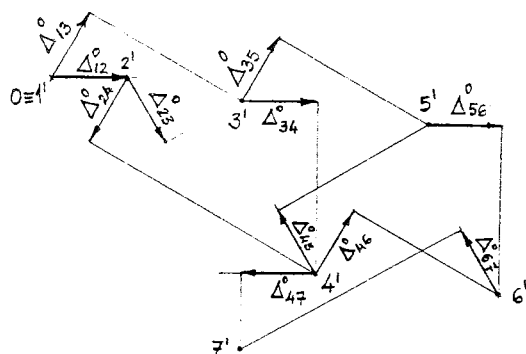


Figura 4.19.- Ejemplo 4.7.

Hallar los movimientos de todos los nudos de la estructura de la figura, supuesto que todas las barras sufren deformaciones totales iguales a 3 mm. Los signos se indican en la propia figura 4.19: alargamiento (+); acortamiento (-).

SOLUCION:

En la figura 4.20 se ha dibujado el diagrama de Williot, que conduce a los movimientos que se resumen en la tabla 4.7.



NUDO	movimientos (mm)	
	u	v
1	0	0
2	3.0	0
3	7.7	-0.9
4	10.8	-7.9
5	15.2	-1.7
6	18.1	-8.8
7	7.8	-11.1

Tabla 4.7.- Ejemplo 4.7.
Resultados.

Figura 4.20. Ejemplo 4.7. Diagrama de Williot

4.6.3.- Movimiento de un nudo y la dirección del movimiento de otro conocidos

Esta situación es muy frecuente en la práctica, ya que normalmente una estructura isostática se sustenta de modo que un nudo está fijo (movimiento conocido nulo) y otro es un apoyo deslizando (dirección del movimiento conocida). El procedimiento a seguir consiste en suponer provisionalmente que una barra de las que acometen al nudo con movimiento conocido tiene un giro dado (nulo normalmente), y llevar a cabo el diagrama de Williot de acuerdo con lo indicado en el apartado anterior. De esta forma se determinan los movimientos de todos los nudos y, en particular, el correspondiente al nudo cuya dirección de movimiento está especificada. Para que la estructura sea compatible, es decir, para que el movimiento correspondiente al apoyo deslizando sea concordante con la liberalización en dicho nudo, se procede al giro de la estructura alrededor del nudo fijo (o con movimiento conocido). El procedimiento operativo se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.8.

Determinar la deformada de la estructura de la figura 4.20(a), supuestas conocidas las deformaciones totales de todas sus barras, con los signos que se indican en la misma: (+) alargamiento y (-) acortamiento.

SOLUCION:

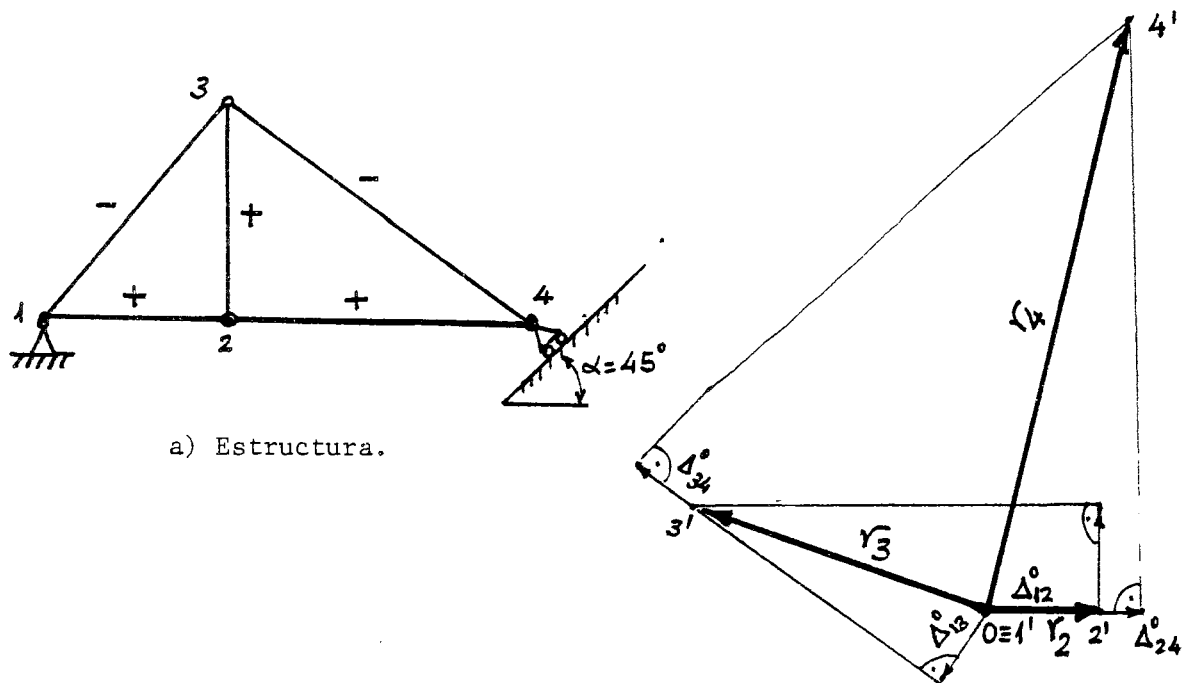
Se supone que la barra 1-2 permanece fija (sin rotación), por lo que se puede dibujar el diagrama de Williot de la figura 4.20(b). Se observa que el nudo 4 experimenta, así, un movimiento $r_4 \equiv \vec{04}'$, que no es compatible con el apoyo deslizante, debiendo anularse la componente normal a la dirección de rodadura. Ello se lleva a cabo mediante un movimiento de sólido rígido de la estructura⁽¹⁾, compatible con sus condiciones de sustentación. Dicho movimiento de sólido rígido corresponde, en este caso, a un giro alrededor del nudo 1 (figura 4.20-c). Su magnitud θ viene definida en función del vector $4\vec{4}''$ (figura 4.20-c), tal que el movimiento final del nudo 4 -obtenido como suma de $\vec{04}'$ (figura 4.20-b) más $4\vec{4}''$ - tenga lugar en la dirección de rodadura -a 45° , en este caso- (figura 4.20-d).

La construcción anterior puede ser efectuada en el propio diagrama de Williot (figura 4.20-b), añadiendo a los movimientos allí obtenidos (r_2 , r_3 , r_4) los originados por el giro de la estructura alrededor de 1 (figura 4.20-c).

Dicha construcción conjunta se refleja en la figura 4.20(e). Se observa que los orígenes de los vectores correspondientes a los movimientos finales (1'', 2'', 3'', 4'') generan una figura homotética de la estructura (figura 4.20-f), aunque girada 90° . El valor de la homotecia viene dado por el ángulo θ , ya que deben verificarse, habida cuenta de la hipótesis de linealidad considerada, las igualdades siguientes (figura 4.20-c):

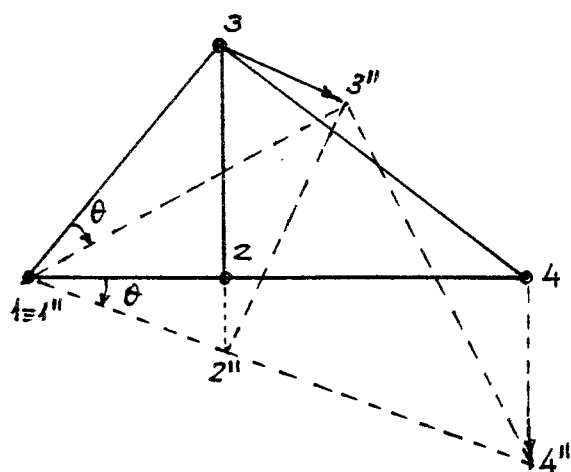
$$\theta = \frac{4\vec{4}''}{1-4} = \frac{2\vec{2}''}{1-2} = \frac{3\vec{3}''}{1-3}$$

(1) Las deformaciones totales de las barras no deben verse afectadas.

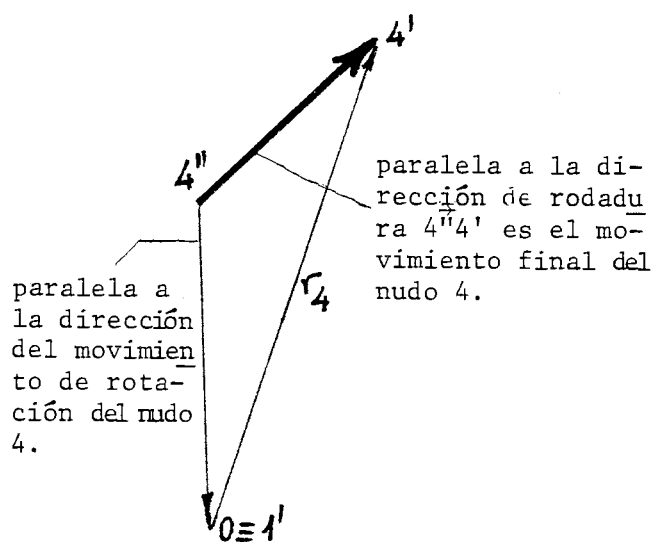


a) Estructura.

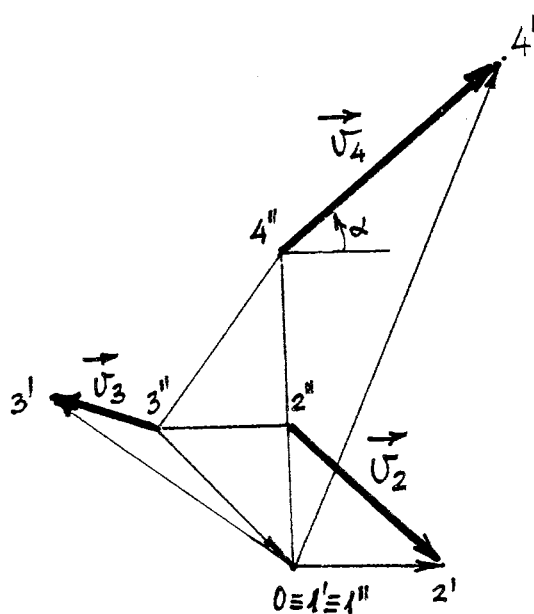
b) Diagrama de Williot.



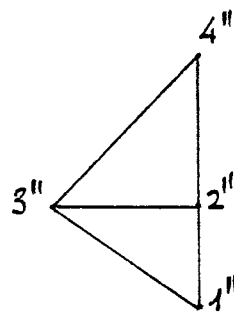
c) Rotación alrededor de 1.



d) Descomposición del movimiento del nudo 4.



e) Diagrama final de Williot.



f) Figura homotética girada de la estructura.

Figura 4.20.- Estructura con un apoyo fijo y otro móvil.

Así pues, los movimientos finales de los nudos quedan definidos por los vectores $\vec{v}_i = i\vec{n}i'$ (figura 4.20-e).

A veces, y en particular en estructuras simétricas, es conveniente, desde el punto de vista del dibujo, comenzar el diagrama de Williot por un nudo intermedio, cuyo movimiento no es conocido de antemano.

En principio se puede suponer nulo (o un valor especificado conveniente) y proceder al dibujo del diagrama de Williot. El movimiento del nudo con desplazamientos conocidos (apoyo fijo) se compatibiliza mediante una traslación opuesta al movimiento del apoyo, lo que, de hecho, equivale a un cambio de origen en el diagrama de Williot, el cual corresponde, ahora al punto fijo de la estructura. A continuación, y con este nuevo origen, se procede como se ha indicado en el ejemplo anterior con relación al apoyo móvil.

Estas ideas se ilustran en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.9.

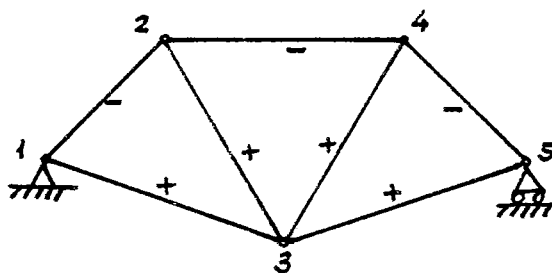
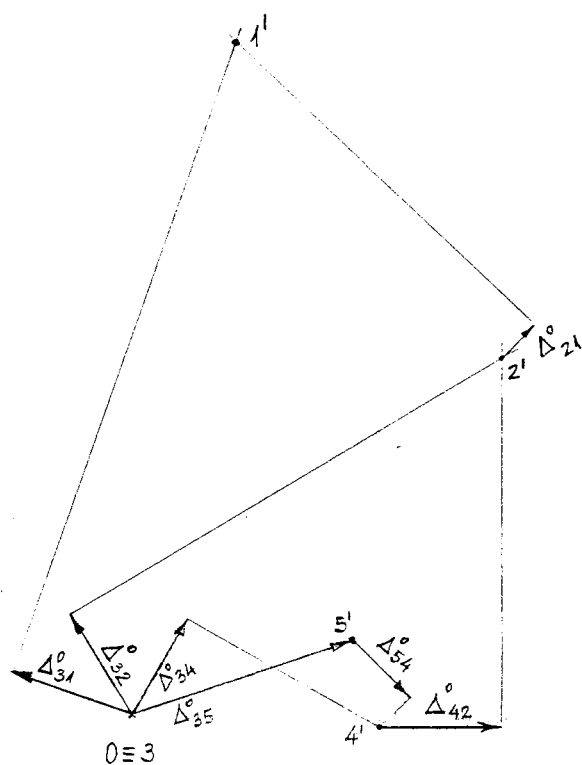
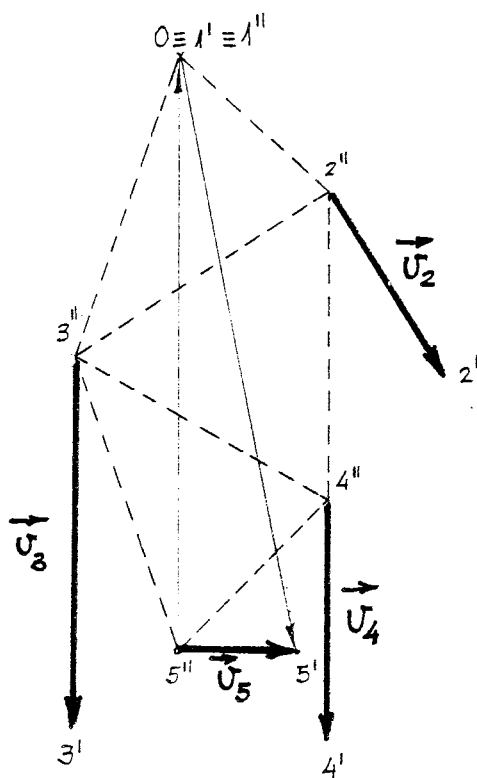


Figura 4.21.- Ejemplo 4.9.

Determinar gráficamente los movimientos de todos los nudos de la estructura representada en la anterior figura. Sobre ella se indican los sentidos de las deformaciones totales de sus barras, representando con (+) los alargamientos y con (-) los acortamientos.



a) Diagrama de Williot (punto fijo \equiv nudo 3).



b) Movimientos finales.

Figura 4.22.- Ejemplo 4.9.- Diagrama de Williot modificado.

SOLUCION:

Se considera, en primer lugar, que el punto 3 es fijo; asimismo se toma la dirección 3-5 como fija y se dibuja el diagrama de Williot (figura 4.22-a). A continuación se hace un cambio de origen al punto 1 (punto fijo de la estructura), con relación al cual el movimiento del nudo 5 definido por el vector $1\vec{5}'$ no es compatible con la condición de apoyo, que sólo admite rodadura en la dirección horizontal. Se procede, por lo tanto, a anular la componente vertical del movimiento $1\vec{5}'$ mediante giro de la estructura alrededor del punto 1, obteniéndose la correspondiente figura homotética girada 90° que define los movimientos finales de los nudos $\vec{v}_i \equiv i\vec{i}'$ (figura 4.22-b).

4.6.3. Casos especiales

Existen tipos de estructuras en los que no es posible llevar a cabo el diagrama de Williot modificado mediante un giro y una traslación. Un ejemplo de esta situación corresponde a una estructura triarticulada como la que se representa en la figura 4.23

Se realizan dos diagramas de Williot independientes para cada una de las dos subestructuras 1 y 2, partiendo en ambos casos del apoyo fijo (1 y 7), y con una barra fija (sin rotación), por ejemplo la 1-2 y la 7-6, respectivamente. De este modo, se deducen dos movimientos para el nudo común 4, correspondiente a la articulación intermedia. Sean (figura - 4.23-b), $0-4_1'$ y $0-4_2'$ dichos movimientos, que, en general, serán diferentes. Se deben introducir sendas rotaciones en las dos subestructuras, de modo que el movimiento del nudo común 4 sea idéntico. Conocidos los valores de esos giros, se sigue el diagrama de Williot como se ha indicado anteriormente, es decir, añadiendo a los diagramas dibujados sendas figuras homotéticas a las subestructuras, que representan los giros precisos para alcanzar la compatibilidad del nudo 4.

En el ejemplo presentado, evidentemente el movimiento del nudo 4 pudo ser obtenido directamente, ya que al estar las barras 1-2 y 2-4

en prolongación, así como las 7-6 y 6-4, la suma de los alargamientos de cada pareja de barras permiten conocer el alargamiento total de 1-4 y 7-4 y deducir así, mediante la simple construcción de Williot (figura 4.17), el movimiento final del nudo 4. Sin embargo, esta construcción no sería posible en un caso general como el que se muestra en la figura 4.24.

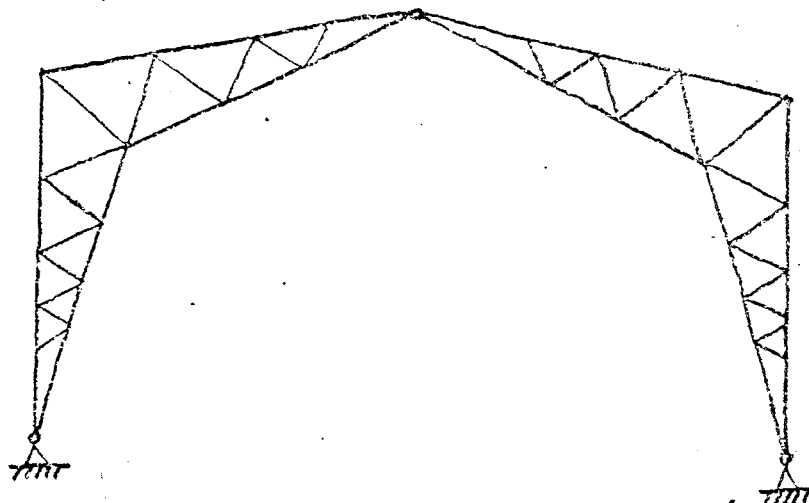


Figura 4.24.- Estructura triarticulada.

4.7. COMENTARIOS FINALES

Se observa la dualidad existente entre el procedimiento gráfico de Cremona y el método de Williot que se acaba de describir. En efecto, en el primero se deducen los esfuerzos en las barras a partir de las acciones externas, que deben de equilibrarse mediante las reacciones pertinentes en los soportes. Análogamente, en el método de Williot se conocen las deformaciones en las barras, a partir de las cuales se obtienen los movimientos en los nudos, que deben compatibilizarse en los apoyos al considerar las coacciones existentes.

Es posible, además, plantear de un modo analítico el método de Williot (figura 4.25). Sean (u_N, v_N) y (u_M, v_M) las componentes, según los ejes x e y de coordenadas, de los movimientos de los nudos N y M . Estos nudos se encuentran unidos mediante sendas barras, i y j , a un nudo P cuyo movimiento (u_P, v_P) se busca.

Se denominan α_i y α_j los ángulos que las barras $i \equiv NP$ y $j \equiv MP$, respectivamente, forman con la horizontal. A continuación se presentan las fórmulas básicas necesarias para el planteamiento analítico del método de Williot.

Mediante identificación de las componentes, según los ejes x e y , de los movimientos, se obtiene (figura 4.25):

$$u_P = u_N + \Delta_i \cos \alpha_i - h_i \sin \alpha_i = u_M + \Delta_j \cos \alpha_j - h_j \sin \alpha_j$$

$$v_P = v_N + \Delta_i \sin \alpha_i + h_i \cos \alpha_i = v_M + \Delta_j \sin \alpha_j + h_j \cos \alpha_j$$

es decir:

$$u_P = (\Delta_i + u_N \cos \alpha_i + v_N \sin \alpha_i) \frac{\sin \alpha_j}{\sin(\alpha_j - \alpha_i)} + (\Delta_j + u_M \cos \alpha_j + v_M \sin \alpha_j) \frac{\sin \alpha_i}{\sin(\alpha_i - \alpha_j)}$$

$$v_P = (\Delta_i - u_N \sin \alpha_i + v_N \cos \alpha_i) \frac{\cos \alpha_j}{\sin(\alpha_i - \alpha_j)} + (\Delta_j - u_M \sin \alpha_j + v_M \cos \alpha_j) \frac{\sin \alpha_i}{\sin(\alpha_j - \alpha_i)}$$

Las fórmulas anteriores permiten calcular u_P y v_P (movimientos del nudo P) en función de las deformaciones de las barras, Δ_i y Δ_j , así como de los movimientos de los nudos opuestos, M y N .

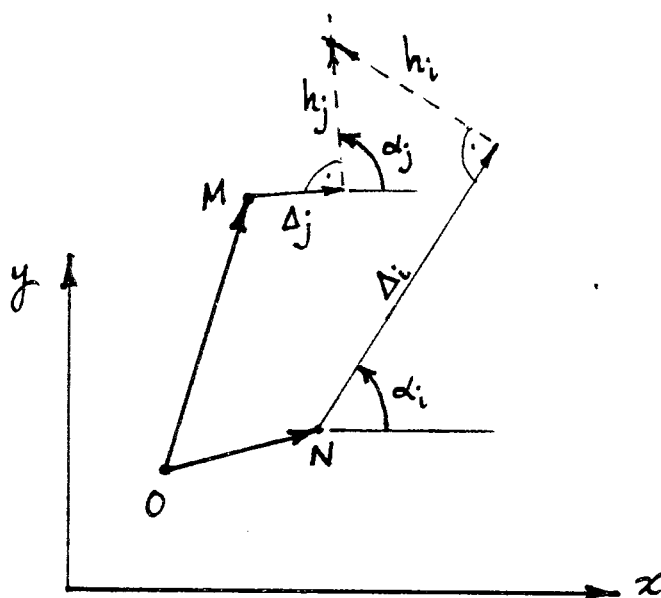


Figura 4.25.- Cálculo analítico del diagrama Williot.

4.8. EJERCICIOS4.8.1. EnunciadosEJERCICIO 4.1.

En la estructura de la figura 4.26, determinar la flecha vertical del punto A.

Características de todas las barras:

$E = 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$ (módulo de elasticidad)

$\Omega = 30 \text{ cm}^2$ (área de la sección transversal)

$I = 200 \text{ cm}^4$ (inercia)

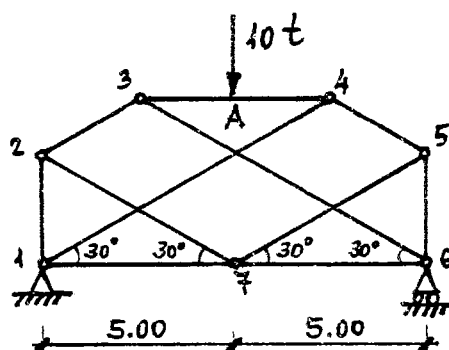


Figura 4.26.- Ejercicio 4.1.

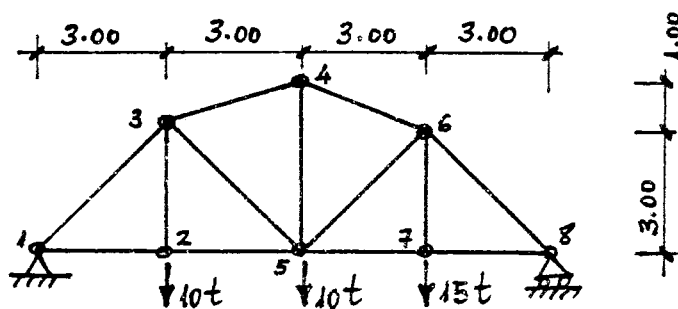
EJERCICIO 4.2.

Figura 4.26.- Ejercicio 4.2.

Hallar la deformada de la estructura de la figura 4.26.

-Sección de todas las barras: $\Omega = 10 \text{ cm}^2$.

-Módulo de elasticidad : $E = 2 \times 10^6 \text{ Kp/cm}^2$.

EJERCICIO 4.3.

Todas las barras de la estructura de la figura 4.27-a tienen características semejantes a las definidas en la figura 4.27-b. Se pide:

Desplazamiento horizontal del nudo 3.

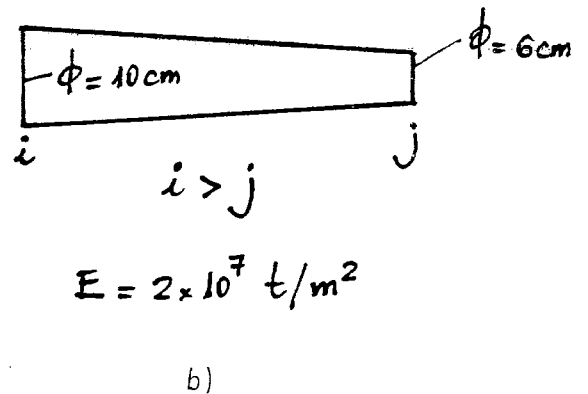
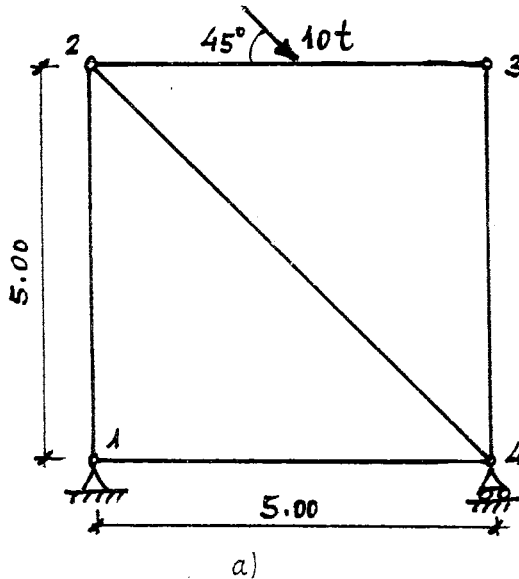


Figura 4.27.- Ejercicio 4.3.

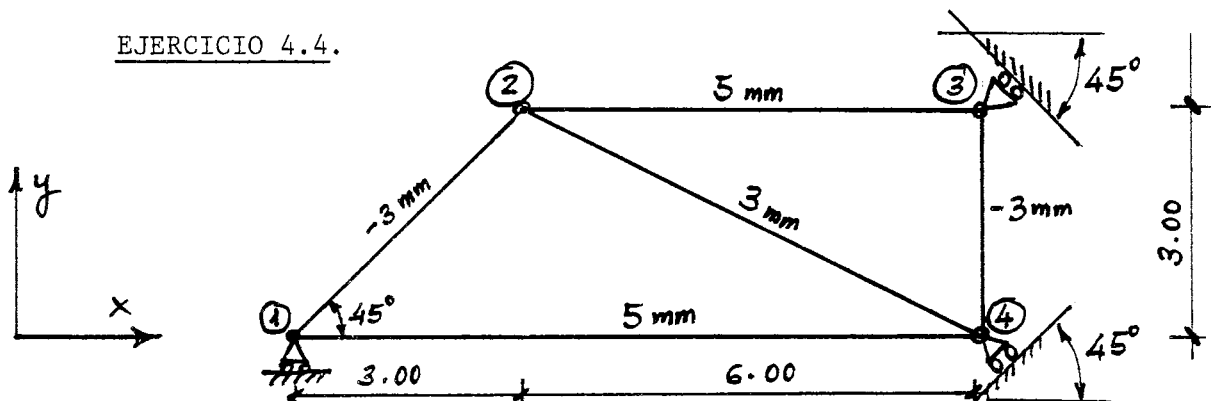
EJERCICIO 4.4.

Figura 4.28.- Ejercicio 4.4.

En la estructura articulada de la figura bajo la acción de cargas y deformaciones impuestas se han obtenido los valores de las deformaciones finales en todas las barras expresadas en milímetros que se indican en la misma. Se pide:

- Obtener mediante un procedimiento gráfico los movimientos de todos los nudos.
- Comprobar analíticamente el movimiento vertical del nudo 2.

4.8.2.- SolucionesEJERCICIO 4.1.

$$V_A = V_1 + V_2 = 65.00 + 0.48 = 65.48 \text{ cm.}$$

EJERCICIO 4.2.

NUDO	u (mm)	v (mm)	$d = (u^2 + v^2)^{1/2}$
2	2,50	16,60	16,70
3	8,05	15,05	16,90
4	5,45	16,00	16,75
5	5,05	18,30	18,85
6	2,20	16,45	16,60
7	7,90	18,75	20,00
8	10,60	0	10,60

EJERCICIO 4.3.

$$u_3 = 0.181 + 0.005 = 0.186 \text{ cm.}$$

CAPITULO 5.- ESTRUCTURAS ARTICULADAS HIPERESTATICAS

5.1.- Determinación de esfuerzos

Como se ha indicado en el Capítulo 2, las estructuras hiperestáticas se caracterizan por el hecho de que los esfuerzos en las barras ó las reacciones de apoyo y a veces ambas, no pueden ser determinadas por las ecuaciones estáticas de equilibrio, cuyo número es insuficiente. Estas condiciones de equilibrio, representadas en el sistema (2.3), cuya expresión matricial es:

$$\underline{A} \underline{F} = \underline{P}$$

presenta mas incógnitas que ecuaciones, o bien,

$$\text{rango } (\underline{A}) = \text{rango } (\underline{A}, \underline{P}) = r = E < I$$

siendo E e I el número de ecuaciones e incógnitas respectivamente, es decir, con la notación del Capítulo 2 (ecuaciones 2.1 y 2.2):

$$E = 2B + 2N$$

$$I = 4B + C$$

El grado de hiperestatismo es:

$$\alpha = I - E$$

y representa el número de condiciones adicionales necesarias para determinar las incógnitas \underline{F} (esfuerzos y reacciones). Estas condiciones corresponden a la compatibilidad en movimientos y se deducen de acuerdo con las técnicas energéticas comentadas anteriormente. A continuación se estudian algunos casos particulares a partir de los cuales puede deducirse una formulación general.

5.2.- Estructuras con incógnitas hiperestáticas externas

Sea la estructura una vez hiperestática, como la que se indica en la figura 5.1, sometida a un conjunto arbitrario de fuerzas en los nudos (P_n) y deformaciones en las barras (Δ_i^0).

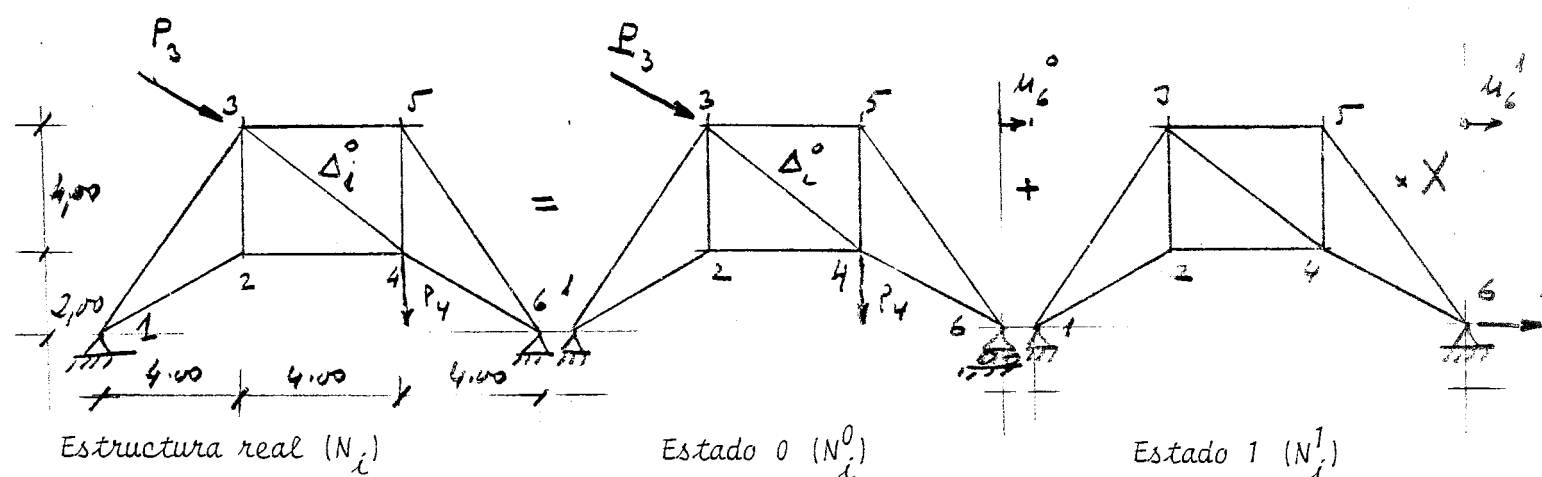


Figura 5.1.- Estructura hiperestática externa.

La estructura se resuelve, descomponiendo su estado real o final como suma de los dos estados (0) y (1) representados en la figura 5.1. Así, el esfuerzo final en una barra genérica i es:

$$N_i = N_i^0 + X N_i^1 \quad (5.1)$$

La condición de compatibilidad corresponde a imponer que el movimiento horizontal del nudo 6 es nulo. Por lo tanto, según el Capítulo 4, se escribe:

$$u_A = 0 = \sum_{i=1}^B (N_i \frac{l_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0) N_i^1 \quad (5.2)$$

o bien, desarrollando, al considerar la igualdad (5.1):

$$\sum_{i=1}^B (N_i^0 \frac{1_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0) N_i^1 + X \sum_{i=1}^B (N_i^1)^2 \frac{1_i}{E\Omega_i} = 0 \quad (5.3)$$

Se observa que la ecuación (5.3) se puede expresar en la forma:

$$u_6^0 + X u_6^1 = 0 \quad (5.4)$$

siendo u_6^0 y u_6^1 los movimientos horizontales del apoyo, en la estructura isostática (liberalizada) en los estados (0) y (1).

Resulta la siguiente expresión de la reacción hiperestática 5.3 (X):

$$X = -\frac{u_6^0}{u_6^1} = -\frac{\sum_{i=1}^B (N_i^0 \frac{1_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0) N_i^1}{\sum_{i=1}^B N_i^2 \frac{1_i}{E\Omega_i}} \quad (5.5)$$

Una vez obtenido el valor de X (si resulta positivo indica conformidad con el sentido supuesto para la reacción en el estado 1 y si es negativo, contrario) se deducen los esfuerzos finales en la estructura mediante la ecuación (5.1):

$$N_i = N_i^0 + X N_i^1$$

y las deformaciones finales:

$$\Delta_i = N_i \frac{1_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0$$

Conviene observar que las acciones externas (cargas y deformaciones iniciales) se consideran únicamente en el estado (0). Deben asimismo considerarse las deformaciones impuestas y las debidas al traspaso de las cargas actuando sobre las barras a los nudos adyacentes. (ver Capítulo 4). Por otra parte, el valor u_6^1 es siempre positivo, supuesto que se adoptan idénticos sentidos positivos para el movimiento a coaccionar y la hiperestática.

En general cuando existen varias incógnitas hiperestáticas externas (en número α), el procedimiento de cálculo que se sigue es análogo, llevándose a cabo en las siguientes etapas:

- 1) Se liberaliza la estructura de las coacciones hiperestáticas, resultando una estructura isostática (básica) y se resuelve esta estructura (estado 0), bajo las acciones externas reales, obteniendo los esfuerzos N_i^0 en las distintas barras i ($i = 1, 2, \dots, B$).
- 2) Se calculan la estructura anterior para cada uno de los α estados k , correspondientes a introducir un influjo unidad eficaz con los movimientos liberalizados. Sea el esfuerzo en la barra i correspondiente al estado k ($k = 1, 2, \dots, \alpha$) designado por N_i^k .
- 3) Las α ecuaciones de compatibilidad, se establece mediante anulación (*) de los correspondientes movimientos liberalizados, en la estructura final, es decir, las condiciones resultantes son para cada movimiento liberalizado n :

$$u_n^0 + \sum_{k=1}^{\alpha} X_k u_n^k = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \alpha) \quad (5.7)$$

con

$$u_n^0 = \sum_{i=1}^B (N_i^0 \frac{l_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0) N_i^n$$

(*) Estos movimientos pueden ser impuestos (especificados) con valor no nulo, en dicho caso el término independiente de la ecuación (5.7) se modifica en este valor dado.

el gdl n que se produce en el estado 0, en donde Δ_i^0 son las deformaciones iniciales (impuestas) en las barras.

$u_n^k = \sum_{i=1}^B N_i^k \frac{l_i}{E \Omega_i} N_i^n$ el movimiento según el gdl n , que se produce en el estado k .

Las ecuaciones (5.7) pueden expresarse matricialmente denominando:

$$\underline{U}_0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_\alpha^0)^T \quad \text{dimensión } (\alpha \times 1)$$

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_\alpha)^T \quad \text{dimensión } (\alpha \times 1)$$

$$\underline{G} = (u_n^k) \quad \text{dimensión } (\alpha \times \alpha)^{(*)}$$

con lo que resulta:

$$\underline{G} \underline{X} + \underline{U}_0 = 0 \quad (5.8)$$

El sistema (5.8) tiene siempre solución, supuesto que la estructura isostática básica, no sea un mecanismo y que las diferentes coacciones liberalizadas sean independientes entre si. En este caso los esfuerzos finales en las barras son directamente:

$$N_i = N_i^0 + \sum_{k=1}^{\alpha} X_k N_i^k \quad (5.9)$$

y las deformaciones totales:

$$\Delta_i = \Delta_i^0 + N_i \frac{l_i}{E \Omega_i}$$

5.3. Estructuras con incógnitas hiperestáticas internas

Se considera primeramente una estructura con una sola incógnita hiperestática interna. (Figura 5.2), sometida a esfuerzos P_n y unas deformacio

(*) La matriz \underline{G} corresponde a una de flexibilidad de la estructura isostática básica y se puede demostrar que es positiva definida y simétrica.

nes impuestas Δ_i^0 . A esta estructura se suprime una barra, de modo que se convierte en isostática. Los esfuerzos en la estructura final se deducen como combinación de dos estados de cargas representados en la figura 5.2.

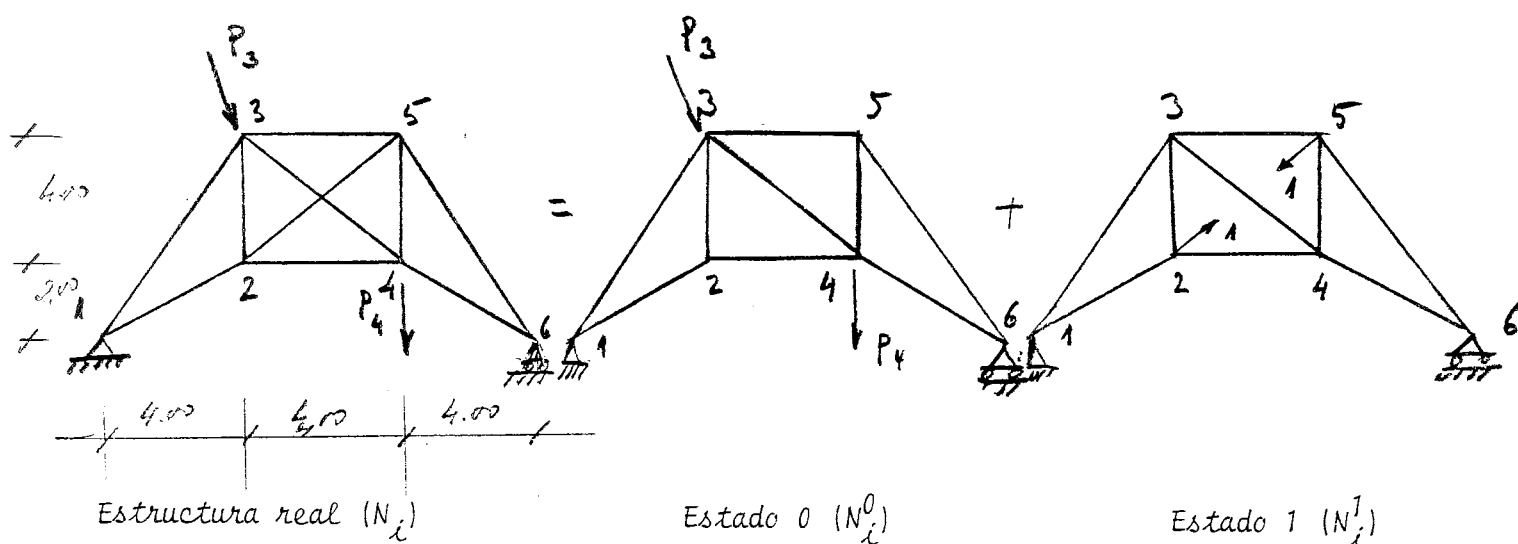


Figura 5.2.- Estructura hiperestática interna.

El esfuerzo final en la barra i genérica (distinta de la suprimida j) es:

$$N_i = N_i^0 + X N_i^1 \quad (i \neq j) \quad (5.10)$$

El esfuerzo final de la barra j suprimida viene dado directamente por la incógnita X , es decir:

$$N_j = X \quad (5.10b)$$

La ecuación de compatibilidad que permite calcular la incógnita hiperestática X , se deduce estableciendo la condición de que el movimiento relativo entre los nudos extremos de la barra suprimida (nudos 2 y 5 en el caso de la estructura de la figura) calculando en la estructura isostática básica coincide con el obtenido directamente del esfuerzo de la barra, es decir mediante la expresión:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^B (N_i \frac{1_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0) N_i^1 = - (N_j \frac{1_j}{E\Omega_j} + \Delta_j^0) \quad (5.11)$$

con j la barra suprimida. El signo menos del segundo miembro procede de que corresponde a una separación (alargamiento de la barra) entre nudos y el signo positivo del cálculo de la estructura básica, impuesto en el estado 1, corresponde a un acercamiento entre nudos.

Una vez obtenido el valor de la incógnita hiperestática X , de la ecuación anterior, los esfuerzos finales en las distintas barras de la estructura se deducen de la expresión (5.10).

Es posible plantear de un modo general y único ambos casos de hiperestatismo externo e interno, y de este modo incluir las ecuaciones (5.11) y (5.12) en una única. Para ello se procede a considerar la estructura básica, con todas las barras de la estructura real, pero suponiendo que en una de ellas el esfuerzo es nulo. Esta hipótesis supone que se ha procedido a realizar un corte en una sección intermedia de la barra, cuyo esfuerzo se desea calcular (hiperestática) en la ecuación de compatibilidad (figura 5.3).

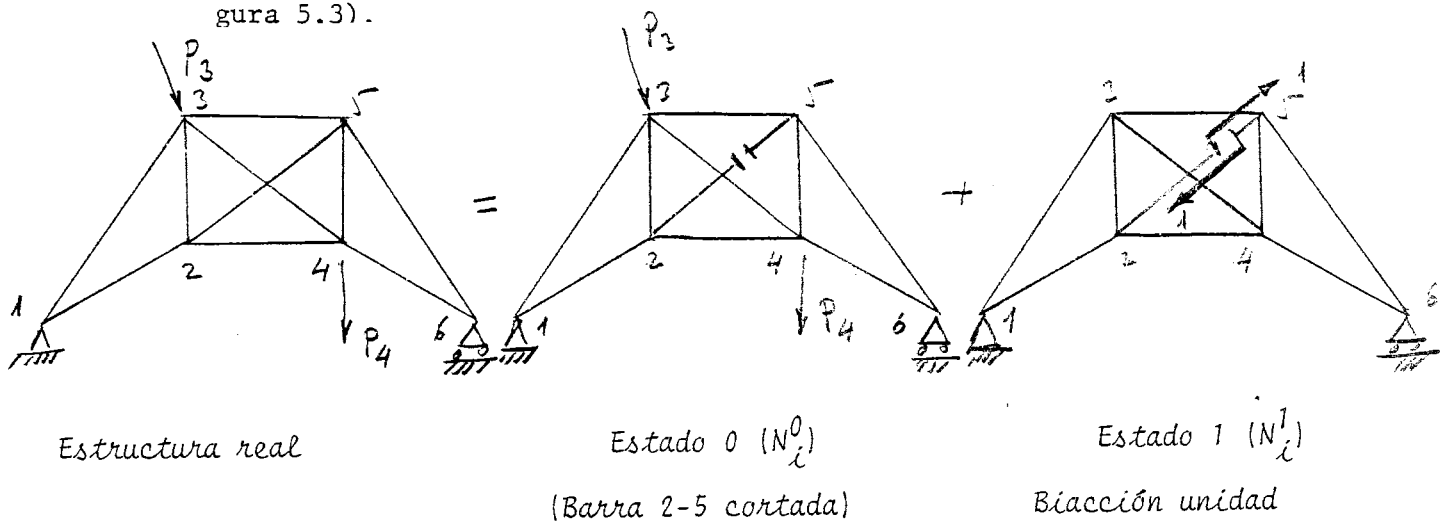


Figura 5.3.- Estructura hiperestática interna (método de la sección).

Como anteriormente, los esfuerzos en la estructura real son combinación de los dos estados 1 y 2 para todas las barras, resultando:

$$N_i = N_i^0 + X N_i^1$$

en donde $N_j^0 = 0 > N_j^1 = 1$ para la barra j cortada (hiperestática).

La condición de compatibilidad a imponer corresponde a garantizar la continuidad en la sección cortada, es decir, movimiento relativo nulo en tre las dos secciones del corte. Por lo tanto, se deduce:

$$\sum_{i=1}^B (N_i \frac{l_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0) N_i^1 = 0 \quad (5.12)$$

Esta ecuación, es formalmente idéntica, a la obtenida en el caso de es tructura hiperestática externa y permite como entonces, calcular la incóg- nita X. Se comprueba asimismo que las ecuaciones (5.11) y (5.12) son idén- ticas ya que basta cambiar el segundo miembro al primer miembro de la pri- mera. La ventaja práctica de considerar la ecuación (5.12) reside en el he cho de que calcula siempre la estructura con un número de barras constante e igual al real, y el tratamiento simultáneo de hiperestáticas externas e internas es directo. no siendo preciso realizar esta distinción.

Ejemplo 5.2.

Resolver la estructura de la figura 5.2 con idénticas acciones (carga y deformaciones impuestas) que en el ejemplo 5.1.

Procediendo como se ha indicado, adoptando como hiperestática el esfuer- zo en la barra 2-5 se puede obtener la tabla 5.2.

TABLA 5.2.

BARRA	$l_i/E\Omega_i$	Δ_i^0	N_i^0	N_i^1	Δ_i	$\Delta_i N_i^1$	$l_i/E\Omega_i (N_i^1)^2$	N_F
1-2	10^{-3}		0,373	0,000	0,373	0	0	0,373
1-3	10^{-3}		-0,601	0,000	-0,601	0	0	-0,601
2-3	10^{-3}		0,167	-0,707	0,167	-0,118	0,500	-0,123
2-4	10^{-3}		0,333	-0,707	0,333	-0,235	0,500	0,043
2-5	10^{-3}		0,000	1,000	0	0	1,000	0,410
3-4	10^{-3}	0,006	0,471	1,000	6,471	6,471	1,000	0,881
3-5	10^{-3}		-0,667	-0,707	-0,667	0,472	0,500	-0,957
4-5	10^{-3}	0,006	1,000	-0,707	7,000	-4,949	0,500	0,710
4-6	10^{-3}		0,747	0,000	0,747	0	0	0,747
5-6	10^{-3}		-1,203	0,000	-1,203	0	0	-1,203
						-1,641	4,000	

con $X = - \frac{-1,641}{4,000} = 0,410$

La extensión del cálculo a varias hiperestáticas se lleva a cabo como se ha indicado en el apartado 5.2.

Ejercicio 5.3.

Calcular la estructura dos veces hiperestática sometida a las acciones definidas en el ejemplo 5.1.

Se adoptan como hiperestáticas la reacción horizontal del apoyo 6 (estado 1) y el esfuerzo en la barra 2-5 (estado 2). Se obtiene de este modo la tabla 5.3.

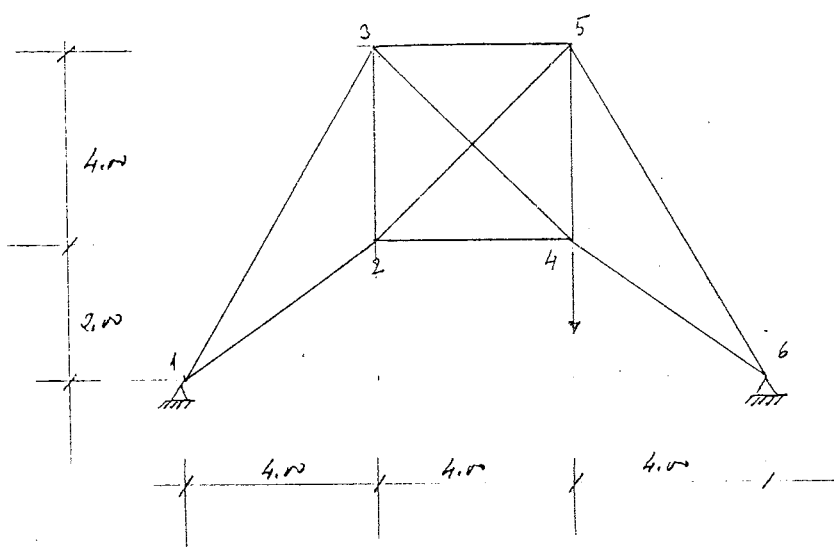


Figura 5.4. Ejemplo 5.3.

TABLA 5.3.

BARRA	N_i^0	N_i^1	N_i^2	$\Delta_i N_i^1$	$\Delta_i N_i^2$	$N_i^1 N_i^1 \frac{1}{E\Omega}$	$N_i^1 N_i^2 \frac{1}{E\Omega}$	$N_i^2 N_i^2 \frac{1}{E\Omega}$	N_F
1-2	0,373	1,678	0,000	0,626	0	2,816	0	0	-1,120
1-3	-0,601	-0,901	0,000	0,542	0	0,812	0	0	0,201
2-3	0,167	0,750	-0,707	0,125	-0,118	0,563	-0,530	0,500	-0,513
2-4	0,333	1,500	-0,707	0,500	-0,235	2,250	-1,061	0,500	-1,014
2-5	0	0	1,000	0,000	0	0	0	1,000	0,017
3-4	0,471	0	1,000	0,000	6,471	0	0	1,000	0,488
3-5	-0,667	-0,500	-0,707	0,333	0,472	0,250	0,354	0,500	-0,234
4-5	1,000	0,750	-0,707	5,250	-4,949	0,563	-0,530	0,500	0,320
4-6	0,747	1,678	0,000	1,253	0	1,816	0	0	-0,746
5-6	-1,203	-0,901	0,000	1,084	0	0,812	0	0	-0,401
				9,713	-1,641	10,882	-1,767	4,000	

Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} 9,713 \\ -1,641 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10,882 & -1,767 \\ -1,767 & 4,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resulta: $X_1 = -0,890t$; $X_2 = 0,017t$; $N_F = N^0 + X_1 N^1 + X_2 N^2$

5.4.- Cálculo general hiperestático

El tratamiento de cálculo de estructuras hiperestáticas que se acaba de comentar en un contexto intuitivo, puede generalizarse desde un punto de vista matemático y por lo tanto adecuado para el cálculo automático por computador, considerando las ecuaciones de equilibrio (2.3). En efecto, se sabe que el sistema:

$$\underline{A} \underline{F} = \underline{P} \quad (2.3)$$

es tal que, $\text{rango}(\underline{A}) = \text{rango}(\underline{A}, \underline{P}) = E < I$, la estructura es α veces hiperestática, con $\alpha = I - E$. Es posible, entonces encontrar una submatriz \underline{A}_0 de la \underline{A} de dimensión $(E \times E)$, tal que sea no singular^(*). Mediante una conveniente reordenación de filas y columnas del sistema (2.3), se puede este escribir en la siguiente forma particionada:

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_0 & \underline{A}_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_0 \\ \underline{F}_1 \end{bmatrix} = \underline{P} \quad (5.13)$$

siendo \underline{A}_1 una matriz de dimensión $(E \times \alpha)$.

La solución del sistema (5.13) es:

$$\begin{aligned} \underline{F}_0 &= \underline{A}_0^{-1} \underline{P} - \underline{A}_0^{-1} \underline{A}_1 \underline{X} \\ \underline{F}_1 &= \underline{X} \end{aligned} \quad (5.14)$$

con $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_\alpha)^T$ un vector de dimensión $(\alpha \times 1)$ conteniendo X_i constantes arbitrarias, cuyos valores (hiperestáticas) se deducen a continuación mediante las condiciones de compatibilidad.

En primer lugar se observa, que la solución (5.14) puede ponerse en la forma:

(*) La submatriz \underline{A}_0 no singular, se deduce normalmente mediante la elección de una estructura isostática básica obtenida por supresión sucesiva de las coacciones en α grados de libertad.

$$\begin{aligned}\underline{F}_0 &= \underline{F}_0^0 + \underline{F}_0^\alpha \underline{X} \\ \underline{F}_1 &= \underline{X}\end{aligned}\quad (5.15)$$

en donde:

$$\begin{aligned}\underline{F}_0 &= \underline{F}_0^0 \\ \underline{F}_1 &= \underline{X}\end{aligned}\quad (5.16)$$

corresponde a la solución de la ecuación (2.3) con $\underline{X} = \underline{0}$ y está en equilibrio con las acciones exteriores \underline{P} .

Además:

$$\begin{aligned}\underline{F}_0 &= \underline{F}_0^\alpha \underline{X} \\ \underline{F}_1 &= \underline{I}_\alpha \underline{X}\end{aligned}\quad (5.17a)$$

con \underline{I}_α matriz unidad de dimensión $(\alpha \times \alpha)$, puede escribirse como suma de α soluciones:

$$\begin{aligned}\underline{F}_0 &= \sum_{k=1}^{\alpha} \underline{F}_0^k \underline{X}_k \\ \underline{F}_1 &= \sum_{k=1}^{\alpha} \underline{F}_1^k \underline{X}_k\end{aligned}\quad (5.17b)$$

cada una de ellas $(\underline{F}_0^k, \underline{F}_1^k)$ representa un sistema de esfuerzos y reacciones en autoequilibrio, es decir, con acción exterior resultante $\underline{P} = \underline{0}$ y que son linealmente independientes entre sí ya que \underline{F}_1^k solo contiene el elemento k-simo no nulo (igual a la unidad).

Los esfuerzos en las barras de la estructura se obtienen inmediatamente de las igualdades (5.16) y (5.17) alcanzándose unas expresiones del siguiente tipo:

$$\underline{N} = \underline{N}^0 + \sum_{k=1}^{\alpha} \underline{X}_k \underline{N}^k \quad (5.18)$$

El vector \underline{N}^0 se define como la de un conjunto de esfuerzos en equilibrio con las acciones exteriores. Se denomina, en el método de la flexibilidad que se estudiará mas adelante, a los esfuerzos \underline{N}^0 , solución particular.

Los diferentes vectores \underline{N}^k corresponden a la solución complementaria o sistemas de esfuerzos en autoequilibrio, y son linealmente independientes.

La determinación de las incógnitas hiperestáticas X_k se lleva a cabo mediante las condiciones de compatibilidad siguientes: (*)

$$\underline{N}^{kT} (\underline{D} \underline{N} + \underline{\Delta}^0) = 0 \quad (**) \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha) \quad (5.19)$$

siendo

$$\underline{D} = \text{diagonal} \left(\frac{1}{E\Omega_1}, \frac{1}{E\Omega_2}, \dots, \frac{1}{E\Omega_B} \right)$$

una matriz de flexibilidad de las barras

$$\underline{\Delta}^0 = (\Delta_1^0, \Delta_2^0, \dots, \Delta_B^0)^T$$

un vector columna de deformaciones iniciales de las barras.

Las ecuaciones (5.19) pueden desarrollarse como sigue:

$$\sum_{n=1}^{\alpha} (\underline{N}^{kT} \underline{D} \underline{N}^n) X_n + \underline{N}^{kT} (\underline{\Delta}^0 + \underline{D} \underline{N}^0) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha)$$

o bien

$$\underline{G} \underline{X} + \underline{G}_0 = 0 \quad (5.20)$$

(*) Estas ecuaciones corresponden desde un punto de vista alternativo a las condiciones de mínimo de la energía complementaria de deformación. (Ver capítulo 6).

(**) Se designa por un superíndice T de matriz transpuesta.

con \underline{G} la matriz de flexibilidad de la estructura que corresponde a una matriz de Gram de los vectores \underline{N}^k para los que se ha definido un producto escalar con la matriz diagonal \underline{D} , es decir, mediante la igualdad:

$$\langle \underline{N}^k, \underline{N}^n \rangle = \underline{N}^{kT} \underline{D} \underline{N}^n \quad (5.21)$$

Se comprende que al ser los vectores \underline{N}^k linealmente independientes, la matriz \underline{G} sea positiva definida.

Por último, el vector \underline{G}_0 representa las dislocaciones o discontinuidades que se producen en la estructura por el sistema de esfuerzos y deformaciones de la solución particular y que se expresan como sigue:

$$\underline{G}_0 = \{ \underline{G}_0^k \}^T \quad \text{con} \quad \underline{G}_0^k = \underline{N}^{kT} (\underline{\Delta}^0 + \underline{D} \underline{N}^0) \quad (5.22)$$

La resolución del sistema de ecuaciones (hiperestático)(5.20), permite determinar los valores de las incógnitas X_k , que se sustituyen en las expresiones (5.18) con lo que se deducen los esfuerzos en todas las barras, o, bien, mas general, en (5.14) que sirven para calcular los esfuerzos y reacciones en todas las estructuras.

5.5.- Obtención de movimientos

Una vez obtenidos los esfuerzos en todas las barras de una estructura hiperestática, el cálculo de sus movimientos no presenta ninguna particularidad con relación a lo indicado para las estructuras isostáticas. Los pasos a seguir como entonces, consisten en deducir, las deformaciones en todas las barras y aplicar el teorema del trabajo complementario debido a una fuerza eficaz unidad^(*) si el cálculo se lleva a cabo analíticamente o dibujar un diagrama de Williot en el caso de un procedimiento gráfico. Como entonces, los casos de cargas en barras y barras curvas y subestructuras se tratan de un modo idéntico. A continuación se comentan brevemente los dos procedimientos: analítico y gráfico.

(*) Ver para capítulo siguiente.

5.1.1.- Procedimiento analítico

Las deformaciones de las barras deducidas del cálculo hiperestático descrito en los apartados anteriores son:

$$\Delta_i = N_i \frac{l_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0 = N_i^0 + \sum_{k=1}^{\alpha} X_k N_i^k + \Delta_i^0$$

Para determinar un movimiento v , se calculan en la estructura un sistema de esfuerzos (N_i^v) isostáticos (en equilibrio) con el influjo unidad eficaz con el movimiento v . No es preciso insistir en la conveniencia de considerar un sistema de esfuerzos (N_i^v) sencillo ^(*), y por lo tanto, en general no es adecuado el cálculo de la estructura hiperestática bajo la acción del influjo unitario.

El movimiento buscado es entonces:

$$v = \sum_{i=1}^B \Delta_i N_i^v \quad (5.23)$$

5.5.2.- Método gráfico

El desarrollo de este método es completamente idéntico al caso de estructuras isostáticas. Se observa en estas estructuras hiperestáticas, que en la obtención del movimiento de un nudo, es posible seguir mas de un camino. Existen, por ejemplo, varias barras que unen el nudo cuyo movimiento se intenta obtener con nudos con movimientos ya conocidos. Cualquiera de estos "caminos" pueden ser utilizados en el diagrama de Williot y los restantes permiten comprobar que el cálculo hiperestático (compatibilidad de las deformaciones) es adecuado ya que el movimiento del nudo debe de ser único.

(*) Pueden deducirse estos esfuerzos N_i^v según una estructura isostática básica "contenida" en la hiperestática real e incluso según un mecanismo como puede comprobarse analíticamente al considerar que otros esfuerzos $\bar{N}_i^u = N_i^u + \bar{X}_k N_i^k$ con \bar{X}_k arbitrarias, conducen a idénticos resultados (hagase como ejercicio).

5.6.- Métodos aproximados en cálculo de estructuras articuladas. La asimilación a una pieza prismática

Los métodos de cálculo de estructuras hiperestáticas que se acaban de exponer en los apartados anteriores pueden ser de aplicación penosa, para un cálculo no automatizado, si el número de incógnitas hiperestáticas es elevado. Incluso en estructuras isostáticas con un gran número de barras, el análisis puede presentar análogo inconveniente. Por otra parte, aparecen sistemas estructurales que combinan vigas de alma llena y celosías de un modo conjunto, generalmente estas últimas para salvar las luces mayores (figura 5.5). El cálculo por computador puede ser excesivamente prolijo e ineficiente si se introducen individualmente cada una de las barras de la celosía. Se hace, por consiguiente preciso modelizar de un modo adecuado, estructuras celosía en piezas prismáticas equivalentes, y que permitan ser sustituidas bien en un cálculo aproximado de esfuerzos o en estructuras complejas conteniendo vigas y celosías como elementos estructurales.

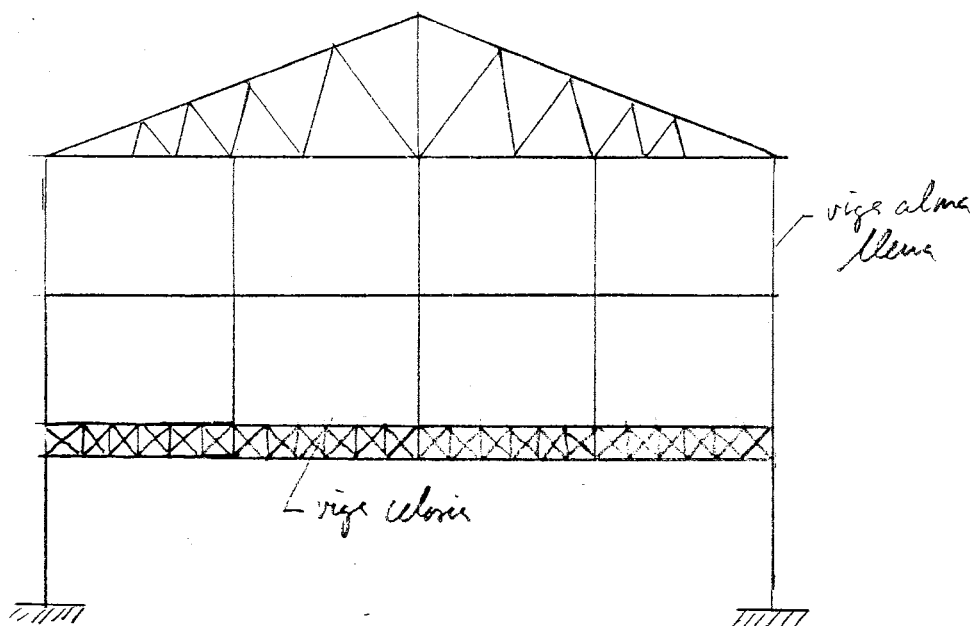


Figura 5.5.- Estructura combinando vigas y celosías.

Dos problemas deben de ser resueltos en este contexto:

- (1) La idealización de la celosía en una viga prismática y (2) la interpre

tación o traducción de los resultados obtenidos de esta viga en esfuerzos en cada una de las barras de la estructura celosía articulada.

La idealización puede efectuarse de una forma adecuada en estructuras articuladas de canto pequeño en relación a su longitud así como las dimensiones de los triángulos constitutivos de la celosía. Un caso típico está constituido por la viga continua de tres vanos y de sección variable de la figura (5.6).

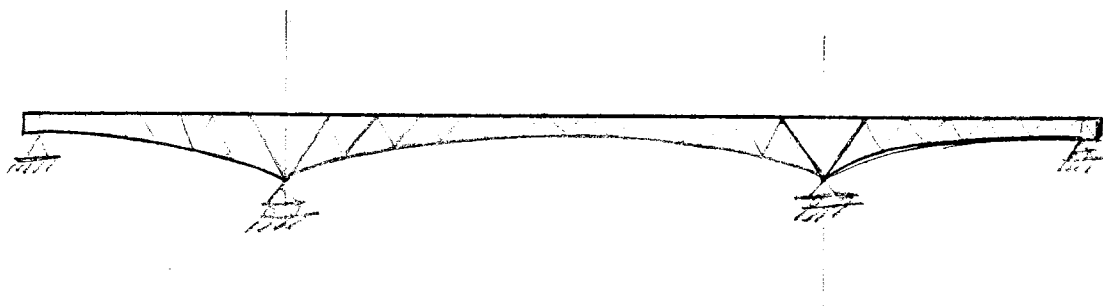


Figura 5.6.- Viga continua de tres vanos.

En estos casos se considera una "rebanada elemental" de celosía y se compara su comportamiento ante la acción de esfuerzos elementales (axil N y flector M) con el de una rebanada elemental de una viga de sección maciza. De esta forma pueden definirse una directriz, un área y una inercia a flexión equivalentes para la celosía (*) (figura 5.7). No se tiene en cuenta, la influencia en estos parámetros, de las diagonales de la celosía, sólo las barras de los cordones superior e inferior que se suponen de áreas Ω_1 y Ω_2 respectivamente, y cuyos módulos de elasticidad se admite como constante e igual a E .

Se adopta como directriz el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición:

$$\Omega_1 g_1 = \Omega_2 g_2 \quad (5.24)$$

(*) No se considera en este estudio elemental la influencia de la deformación a cortante, importante en estos tipos de estructuras celosía y que debe de considerarse en la obtención de movimientos. El efecto del área reducida a cortante es muchas veces poco importante en la distribución de esfuerzos.

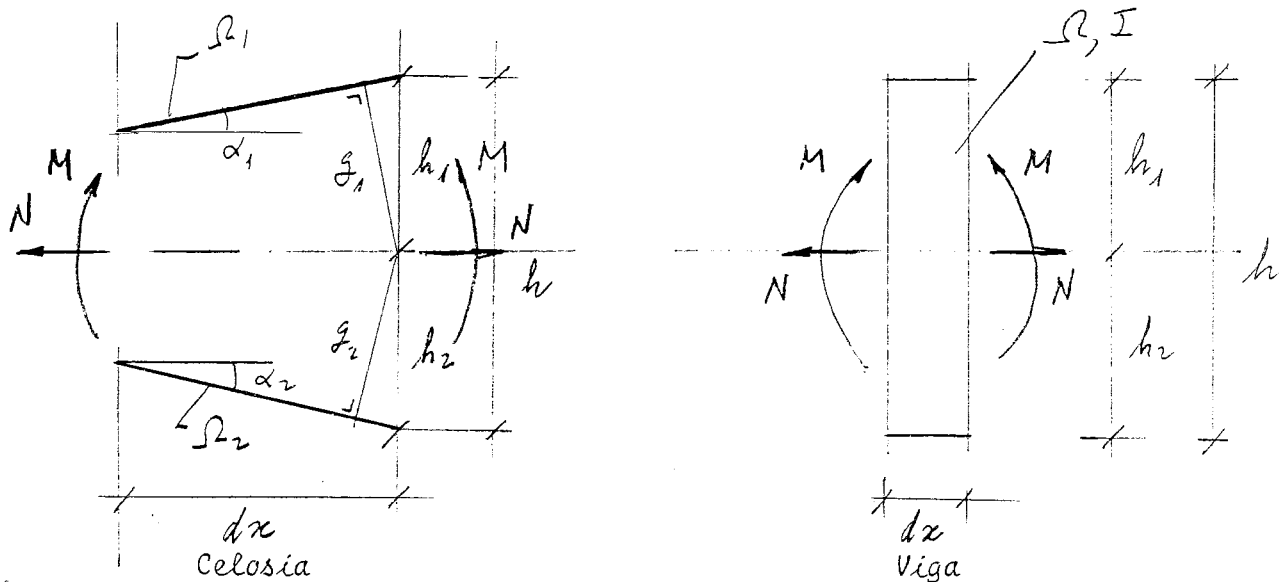


Figura 5.7.- Rebanada elemental.

La ecuación (5.24) expresa el hecho de que un axil N aplicado en la fibra neutra produce tensiones constantes en la sección. En efecto sea σ esta tensión, se deduce que la resultante de estas tensiones en la sección de la celosia corresponde al punto tal que el momento de este resultante es nulo; es decir:

$$N_1 g_1 = N_2 g_2$$

con

$$N_1 = \sigma \Omega_1 \quad \text{y} \quad N_2 = \sigma \Omega_2$$

los axiles resultantes de estas tensiones en cada uno de los cordones de la celosia. En general, la determinación de la directriz se tiene que efectuar mediante tanteos.

Sean α_1 y α_2 , los ángulos que, en valor absoluto, forman las cabezas con la directriz. En la normal a esta directriz, las barras interceptan los segmentos siguientes de longitud h_1 y h_2 , en valor absoluto y que están relacionados, de acuerdo con (5.24), como sigue:

$$h_1 \Omega_1 \cos \alpha = h_2 \Omega_2 \cos \alpha \quad (5.25)$$

Las ecuaciones de equilibrio de los esfuerzos N y M con los ejes resultantes N_1 y N_2 en las barras 1 y 2 son:

$$\begin{aligned} N &= N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 \\ M &= -N_1 \cos \alpha_1 h_1 + N_2 \cos \alpha_2 h_2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Las ecuaciones (26) pueden expresarse de un modo inverso, como sigue:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N h_2}{(h_1 + h_2) \cos \alpha_1} - \frac{M}{(h_1 + h_2) \cos \alpha_1} \\ N_2 &= \frac{N h_1}{(h_1 + h_2) \cos \alpha_2} + \frac{M}{(h_1 + h_2) \cos \alpha_2} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Considerando la igualdad (5.25) en las ecuaciones (5.27) se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{\Omega_1} = \sigma_1 &= \frac{N}{\Omega_1 \cos \alpha_1 + \Omega_2 \cos \alpha_2} - \frac{M h_1}{h_1^2 \Omega_1 \cos \alpha_1 + h_2^2 \Omega_2 \cos \alpha_2} \\ \frac{N_2}{\Omega_2} = \sigma_2 &= \frac{N}{\Omega_1 \cos \alpha_1 + \Omega_2 \cos \alpha_2} + \frac{M h_2}{h_1^2 \Omega_1 \cos \alpha_1 + h_2^2 \Omega_2 \cos \alpha_2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

La comparación de estas expresiones, con las análogas de la viga maciza equivalente de área Ω e inercia a flexión I :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{\Omega} - \frac{M h_1}{I} \\ \sigma_2 &= \frac{N}{\Omega} + \frac{M h_2}{I} \end{aligned} \quad (5.29)$$

conduce a los valores de las características elastomecánicas de la sección de la viga maciza equivalente:

$$\Omega = \Omega_1 \cos \alpha_1 + \Omega_2 \cos \alpha_2 \quad (5.30)$$

$$I = h_1^2 \Omega_1 \cos \alpha_1 + h_2^2 \Omega_2 \cos \alpha_2$$

Las fórmulas (5.30) así como las (5.25) permite idealizar una celosía alargada en una barra de tipo prismático.

Los resultados del cálculo como viga -isostática o hiperestática- que pueden obtenerse de acuerdo con los métodos que se describen mas adelante, corresponden a las leyes de esfuerzos M , N y Q . Para una sección determinada, los esfuerzos en las cabezas de la viga de celosia se deducen inmediatamente mediante las fórmulas deducidas de (5.28):

$$N_1 = \Omega_1 \left(\frac{N}{\Omega} - \frac{M h_1}{I} \right)$$

$$N_2 = \Omega_2 \left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M h_1}{I} \right) \quad (5.31)$$

Por otra parte, los esfuerzos en las barras inclinadas se calculan una vez conocidos estos axiles, utilizando las fórmulas de equilibrio de cortantes en cada sección, es decir (figura 5.8):

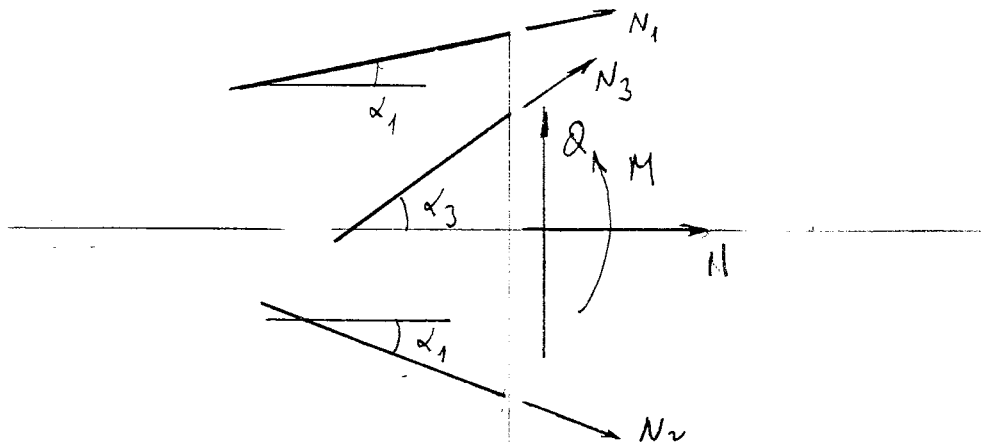


Figura 5.8.- Obtención de esfuerzos en barras inclinadas.

$$Q = N_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - N_2 \operatorname{sen} \alpha_2 + N_3 \operatorname{sen} \alpha_3$$

que conduce a la expresión del axil en la barra inclinada:

$$N_3 = \frac{1}{\text{sen}\alpha_3}(Q - N_1\text{sen}\alpha_1 + N_2\text{sen}\alpha_2) \quad (5.32)$$

Conviene tener presente que el ángulo α_3 debe incluirse en la fórmula (5.32) con su signo.

Por último, puede fácilmente mostrarse que la elongabilidad y flexibilidad de la rebanada elemental de la celosía son respectivamente:

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \frac{dS}{E\Omega} \\ d\phi &= \frac{dS}{EI} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Las fórmulas (5.33) justifican la utilización de esta idealización, de una viga en celosía como viga maciza, en estructuras hiperestáticas. Conviene tener presente que la consideración de la deformación por cortante se hace preciso en frecuentes casos de vigas con relaciones elevadas luz/canto o con las barras inclinadas de escasa sección, si bien el tipo de carga actuante (concentrada o repartida, etc) impide dar recomendaciones de carácter general.

EJERCICIOS ENUNCIADOS

- 5.1. Resolver la estructura del ejemplo 5.1, suponiendo que la hiperestática es interna. Considérese el esfuerzo de la barra 1-3 como hiperestática. Repitase el cálculo considerando hiperestática la barra 3-4. Comente el ejercicio.
- 5.2. Obtener los esfuerzos en las barras y las reacciones en los apoyos de la estructura de la figura para aumento de temperatura de 40°C . Coeficiente de dilatación del acero de las barras $k = 12 \times 10^{-6} /^{\circ}\text{C}$ y módulo de elasticidad $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg cm}^{-2}$. Area de las barras se expresa en cm^2 y son los números entre paréntesis de la figura.
- 5.3. Obtener los esfuerzos que se producen en la estructura al experimentar esta un aumento de temperatura de 20°C en todas sus barras.
 $E = 2 \times 10^7 \text{ tm}^{-2}$; $\Omega = 100 \text{ cm}^2$ en todas las barras $k = 12 \times 10^{-6} /^{\circ}\text{C}$.
- 5.4. Obtener las reacciones en los apoyos de la estructura representada en la figura.
- 5.5. Calcular los esfuerzos en las barras de la estructura dada. Acercamiento entre los nudos 1 y 2. $\Omega = 5 \text{ cm}^2$ y $E = 2 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2}$ (todas las barras).
- 5.6. Calcular los esfuerzos en la estructura dada y el corrimiento vertical del nudo 3, para un aumento de temperatura de 50°C .
 $k = 10^{-4}$, $\Omega = 20 \text{ cm}^2$ y $E = 2 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2}$ (en todas las barras).
- 5.7. Obtener el esfuerzo axial y momento flector en la sección central de cada barra.
- 5.8. Todas las barras de la estructura son idénticas y se pide obtener el es fuerzo en todas ellas.

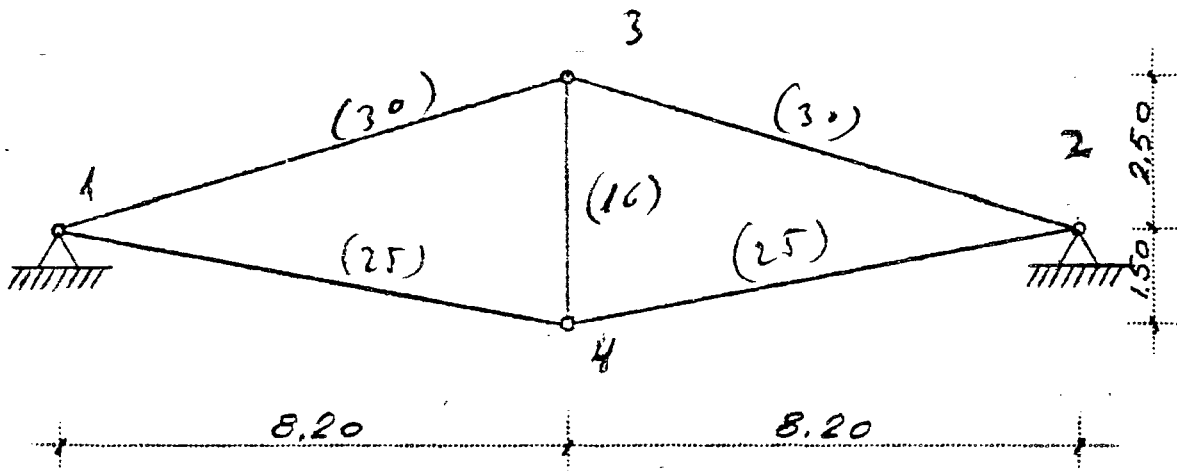


Figura 5.9. Ejercicio 5.2.

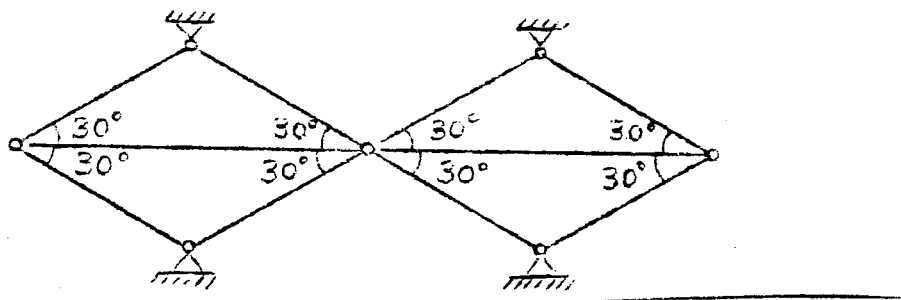


Figura 5.10. Ejercicio 5.3.

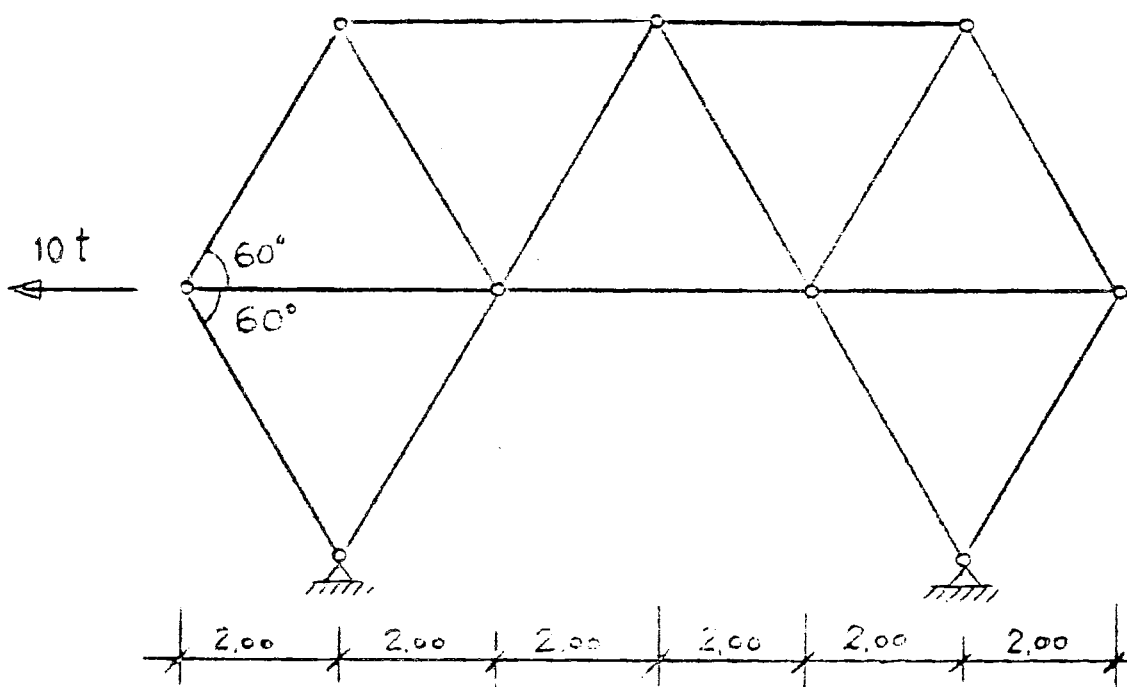


Figura 5.11. Ejercicio 5.4.

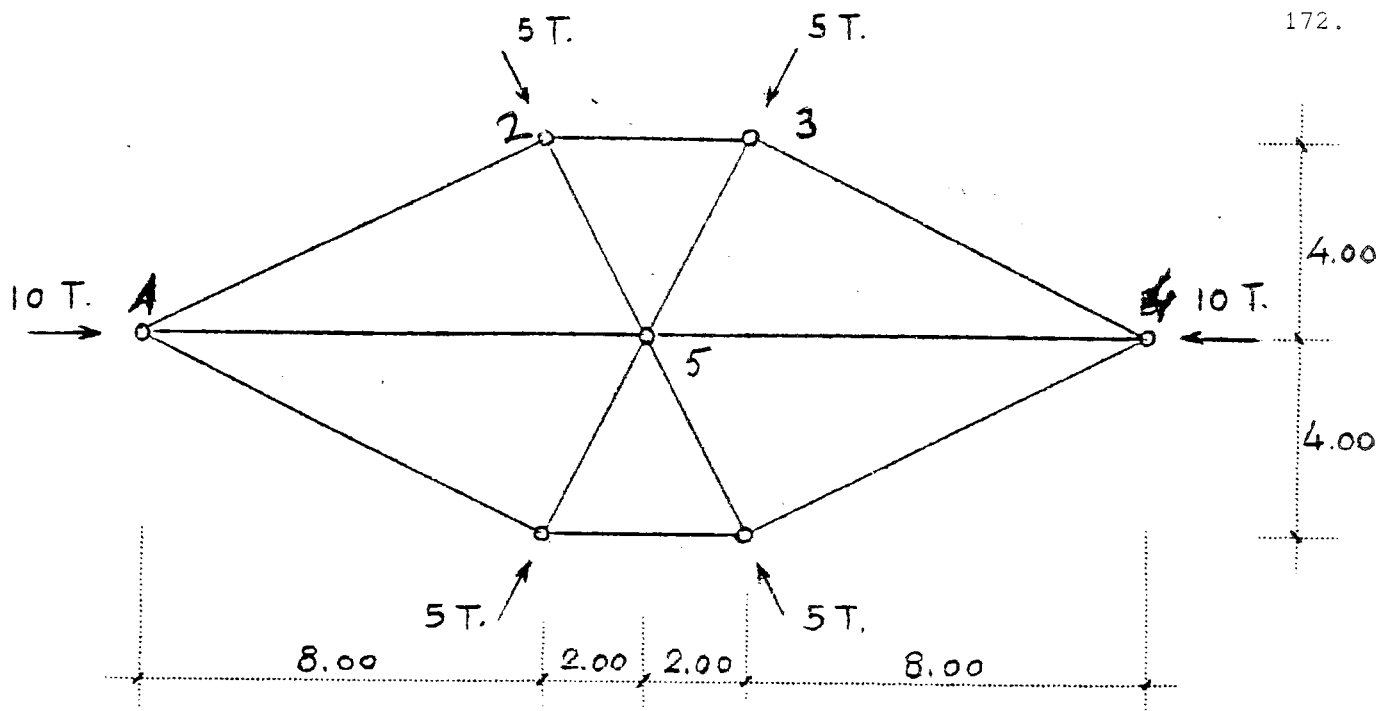


Figura 5.12. Ejercicio 5.5.

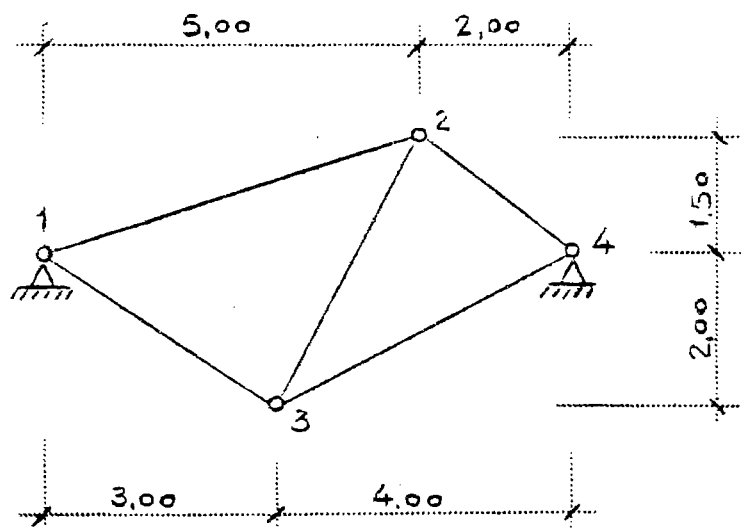


Figura 5.13. Ejercicio 5.6.

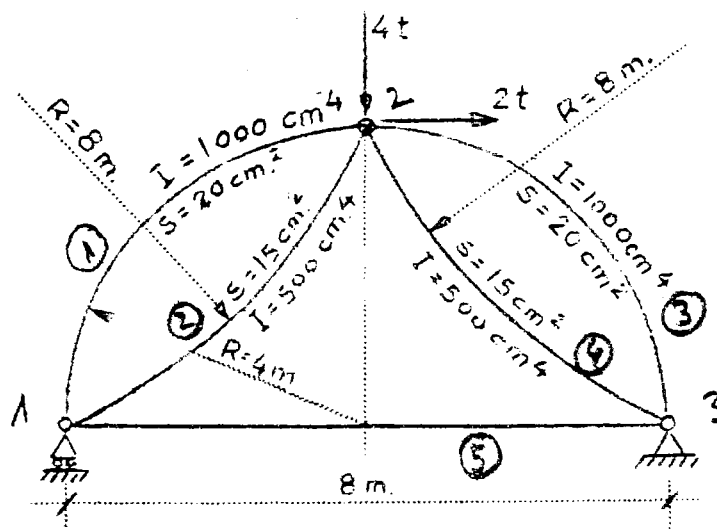


Figura 5.14. Ejercicio 5.7.

5.9. Obtener los esfuerzos en todas las barras, siendo $1/E\Omega = \text{Cte.}$

5.10. En la estructura articulada de la figura se pide:

- (a) Reacciones en los nudos 1, 5 y 6.
- (b) Esfuerzos en las barras.
- (c) Movimientos del nudo 5 expresado en mm, sabiendo que los movimientos de 2 y 4 son:

$$\begin{array}{ll} u_2 = 0,37 \text{ mm} & u_4 = 0,37 \text{ mm.} \\ v_2 = -0,09 \text{ mm} & v_4 = 0,65 \text{ mm} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Omega = 40 \text{ cm}^2 \text{ para todas las barras} \\ I = 10^5 \text{ cm}^4, E = 2 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2} \text{ y } L = 3 \text{ m.} \end{array}$$

5.11. Esfuerzos en las barras de la estructura.

Barras derecha superior $\Omega = 40 \text{ cm}^2$, excepto barras del cordón 8-4.
 $\Omega = 15 \text{ cm}^2$.

Barras derecha inferior $\Omega = 50 \text{ cm}^2$, excepto barras del cordón 1-3-5-7.
 $\Omega = 20 \text{ cm}^2$.
 $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2}$.

5.12. Calcular:

- (a) En la estructura (a), el acercamiento relativo de los nudos 2-4.
 $\Omega = 30 \text{ kgcm}^{-2}$ y $E = 2 \times 10^7 \text{ kgcm}^{-2}$ en todas las barras.
- (b) En la estructura (b), los esfuerzos en todas las barras.
 $\Omega = 30 \text{ cm}^2$ en todas las barras rectas
 $\Omega = 50 \text{ cm}^2$, $I = 6 \times 10^3 \text{ cm}^4$ en la barra curva
 $E = 2 \times 10^7 \text{ kgcm}^{-2}$.

5.13. Obtener los esfuerzos en todas las barras, en las siguientes hipótesis de carga:

- (a) Sistema de fuerzas representado en la figura.
- (b) Aumento de 25°C del cordón superior ABC.
- (c) Descenso vertical de 2 cm en el apoyo D.

Todas las barras: $L/E\Omega = 1,5 \times 10^{-4} \text{ m/t}$, $k = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

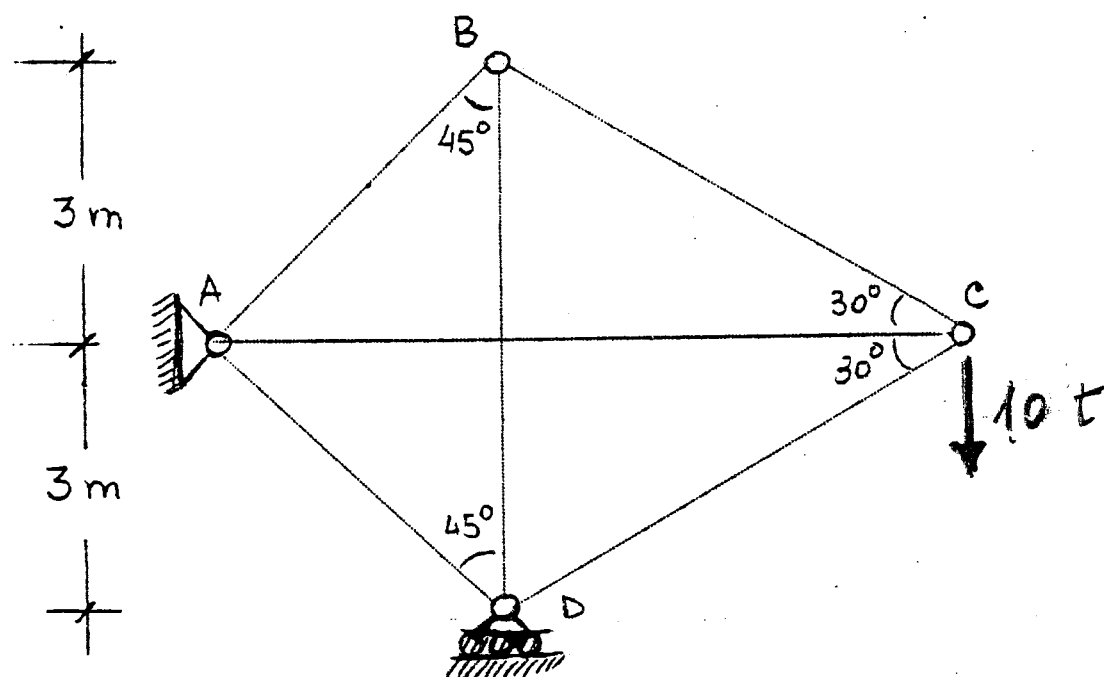


Figura 5.15. Ejercicio 5.8.

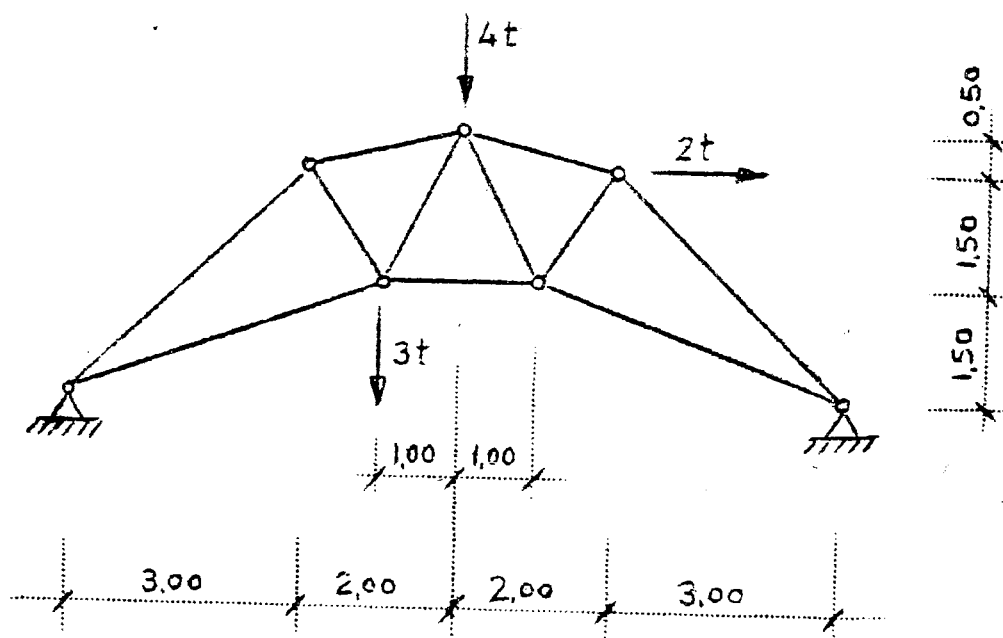


Figura 5.16. Ejercicio 5.9.

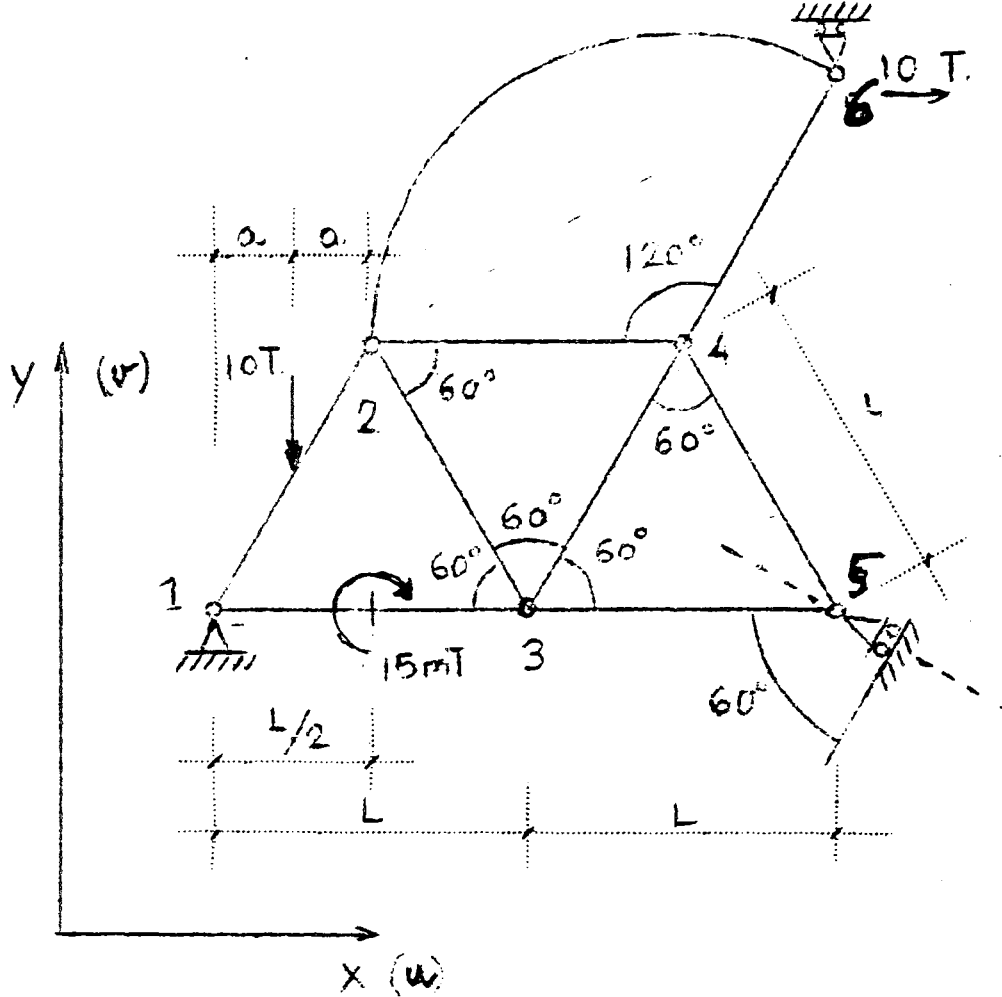


Figura 5.17. Ejercicio 5.10.

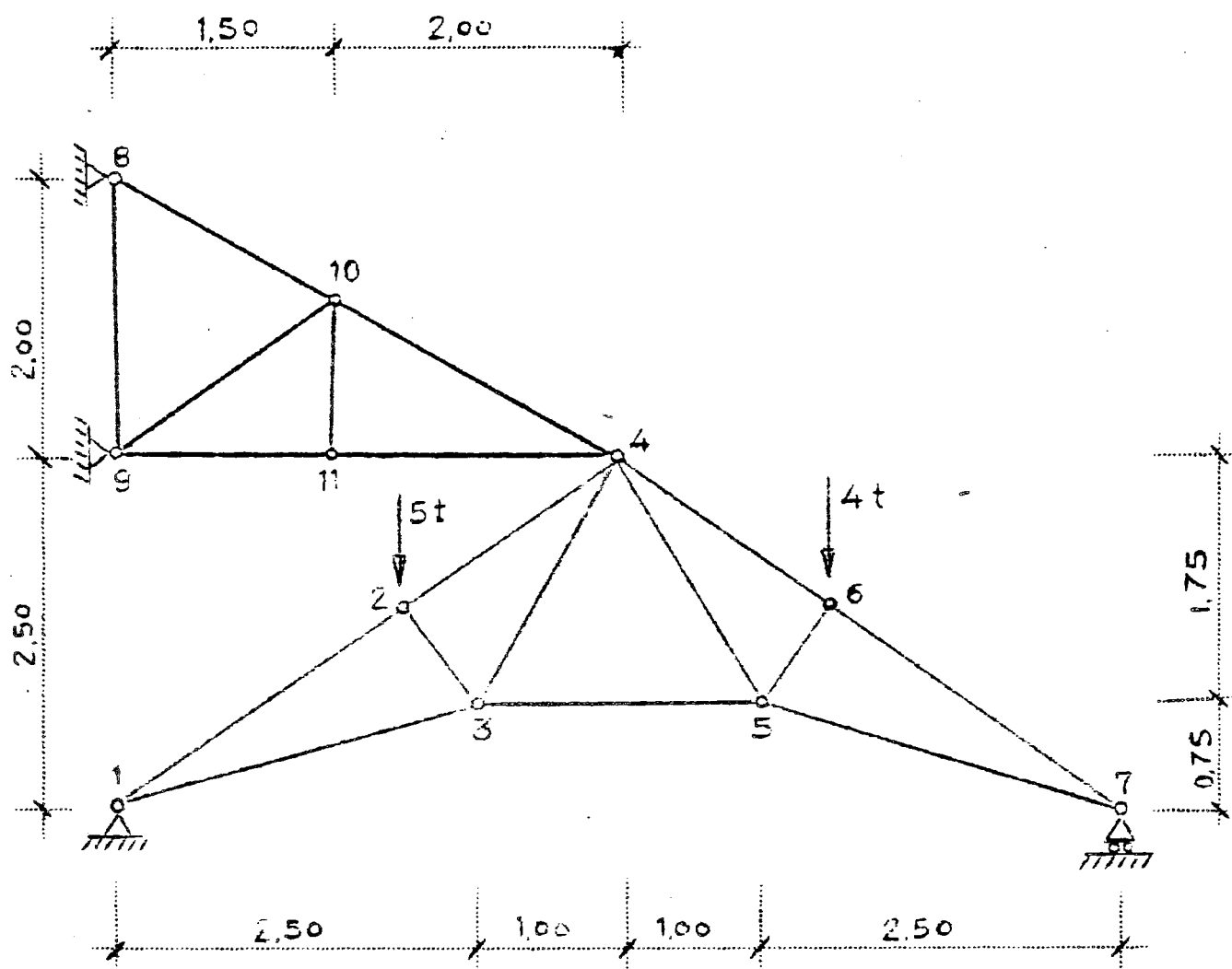


Figura 5.18. Ejercicio 5.11.

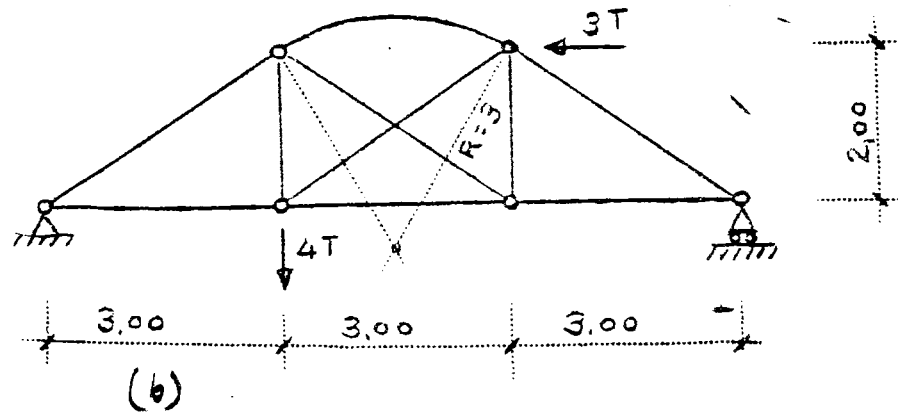
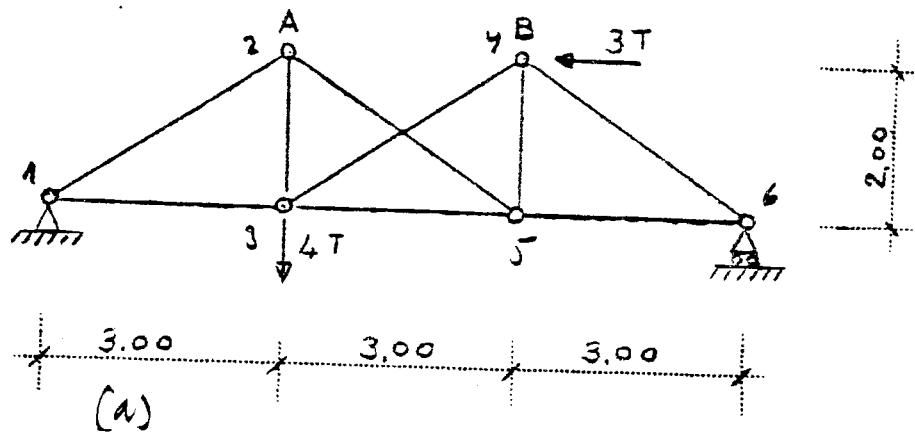


Figura 5.19. Ejercicio 5.12.

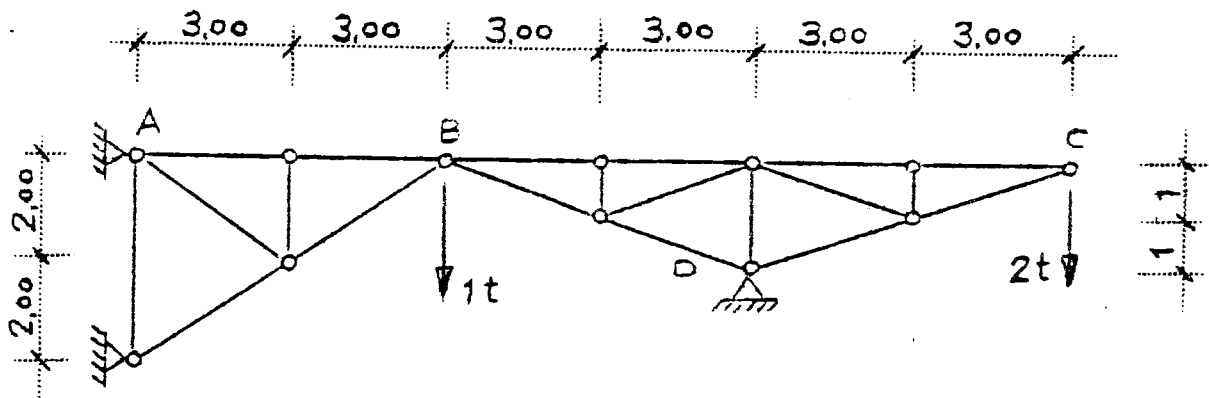


Figura 5.20. Ejercicio 5.13.

- 5.14. Esfuerzos en todas las barras, reacciones de apoyo y movimientos en los nudos.

Todas las barras $L/E\Omega = 2,5 \times 10^{-5}$ cm/kg.

El muro M es infinitamente rígido en sentido vertical y no presenta en cambio coacción alguna para un movimiento horizontal.

- 5.15. En la estructura de la figura el apoyo C es un flotador que desciende 1 cm por cada tonelada de reacción.

Esfuerzos en todas las barras, con $1/\Omega = 2,5 \times 10^4$ m⁻¹ y $E = 2 \times 10^6$ kgcm⁻².

- 5.16. En la estructura de la figura las cinco barras señaladas con doble línea tienen un módulo de elasticidad de 2×10^5 kgcm⁻². Las restantes lo tienen de 2×10^6 kgcm⁻².

Se pide:

- (a) Estudiar la estructura, clasificándola.
- (b) Esfuerzos en todas las barras y reacciones.
- (c) Movimiento vertical del nudo 4.

- 5.17. En la estructura adjunta, la pieza 2-6 es de hormigón y está formada por dos arcos de círculo de centros 6 y 2. Su sección es de 0,20 m², y su inercia es tal que $E\Omega R^2/EI = 100 \cdot N$ (N número entero de 1 a 100). Las restantes barras son metálicas con una sección de 10 cm².

Módulo de elasticidad del hormigón: 300.000 kgcm⁻².

Módulo de elasticidad del acero : 2.000.000 kgcm⁻².

Las acciones son una carga de $P = 80t$ y un alargamiento de 3,0 cm en la barra 4-6.

Se pide:

- (a) Leyes de esfuerzos en todas las barras.
- (b) Desplazamiento vertical del nudo 5.

- 5.18. Determinar los esfuerzos en todas las barras y el desplazamiento vertical del nudo 6 en cms.

Todas las barras son de acero con $E = 2 \times 10^6$ kgcm⁻² y $\Omega = 10$ cm².

- 5.19. En la estructura de la figura existe un tensor de rosca T intercalado en la barra 1-6. Por necesidades del proceso de montaje y a lo largo del mismo, para encajar la estructura en su situación definitiva ha sido necesario acercar entre sí los nudos 1 y 6 por medio del tensor T una distancia de 1 cm.
- ¿Qué esfuerzos aparecen en todas las barras debidos a esta solicitud suplementaria?
- $E = 2 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2}$ y $L/\Omega = 5.000 \text{ m}^{-1}$ para todas las barras.
- 5.20. Acortamiento o alargamiento que hay que introducir al tensor situado en la barra 3-8 para que con el estado de cargas indicado, se obtenga una reacción vertical en el nudo 9 de 7 toneladas.
- Para todas las barras $L/E\Omega = 2 \times 10^{-4} \text{ m/t}$.
- 5.21. Esfuerzos en todas las barras de la estructura. La longitud de todas las barras es 4.00 m excepto la de la 1-2 y 5-7 que es de 4 3 m. Todas ellas, se han dimensionado de modo que $L/E\Omega = 2,5 \times 10^{-4} \text{ m/t}$.
- 5.22. Esfuerzos en todas las barras de la estructura articulada plana de la figura.
- Se supone que en la articulación del nudo 6 existe un rozamiento, tal que induce un momento exterior M proporcional al cambio del ángulo relativo $\Delta\theta$ entre las barras 4-6 y 5-6 que concurren en él. Se sabe que para una variación de ángulo 10^{-3} radianes, aparece un momento de 50 mt.
- Todas las barras son de sección constante e igual a 10 cm^2 . $E = 2 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2}$.
- 5.23. Resolver idéntico problema al 5.22 pero suponiendo que $\Delta\theta$ es el ángulo de giro en el nudo de las dos barras concurrentes en el nudo con rozamiento.
- 5.24. En la estructura articulada de la figura, todas las barras son circulares, de diámetro exterior 10 cm y espesor 1 cm. El radio medio de la estructura es de 1 m.
- Si la barra 1-2 sufre un acortamiento de 6 cm, hallar el movimiento relativo entre los nudos 2 y 4. $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2}$.

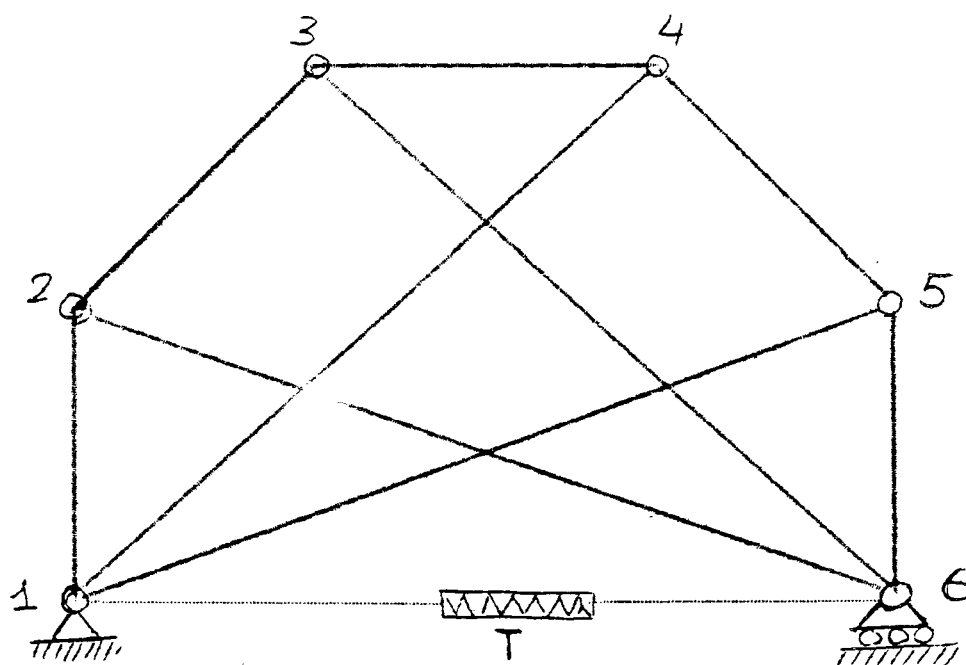


Figura 5.26. Ejercicio 5.19.

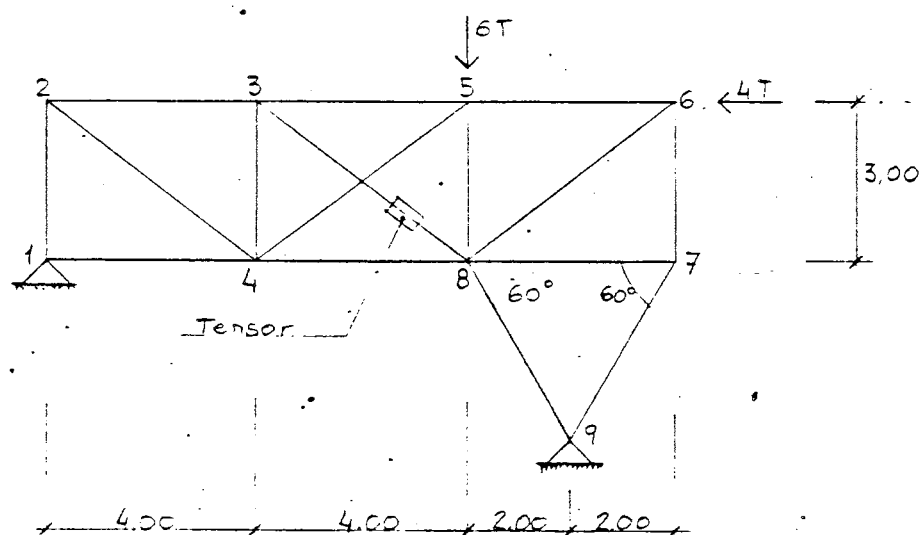


Figura 5.27. Ejercicio 5.20

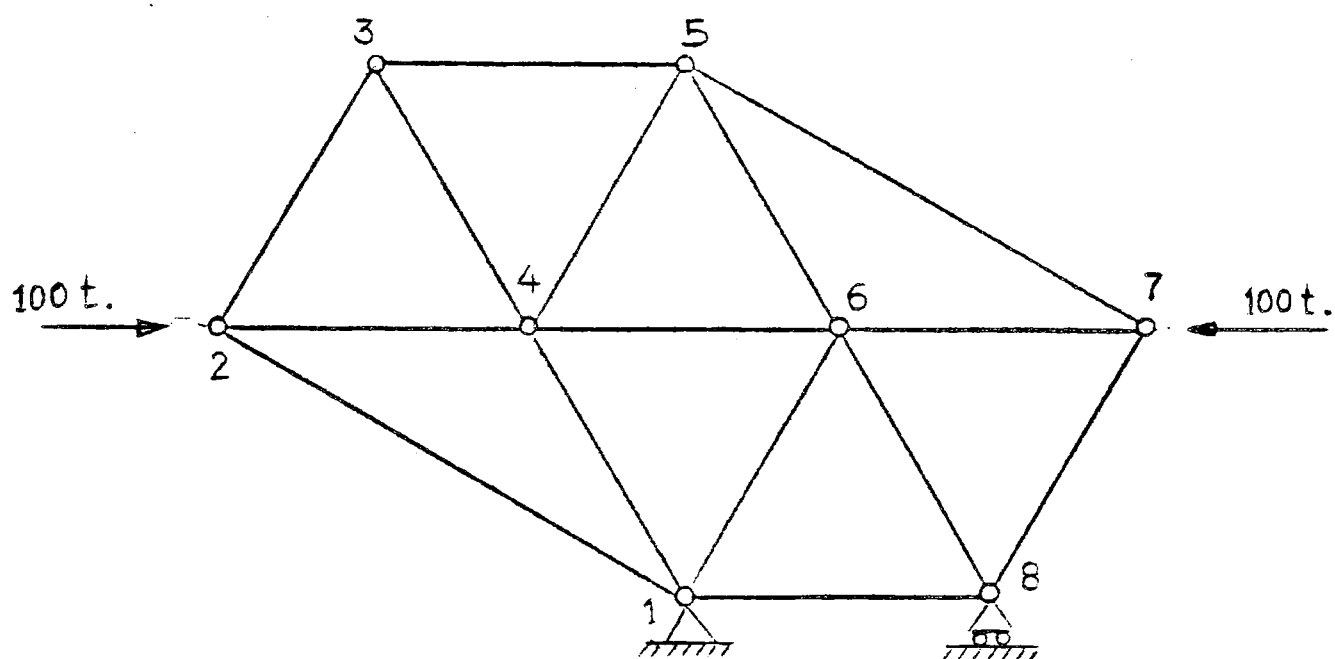


Figura 5.28. Ejercicio 5.21.

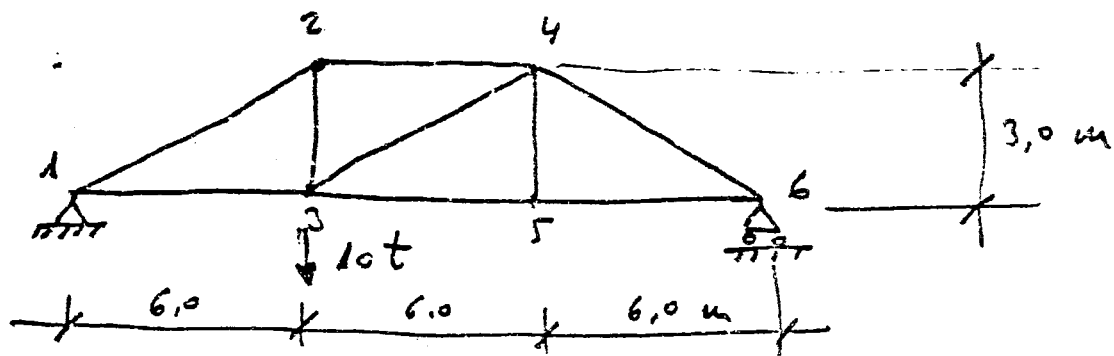
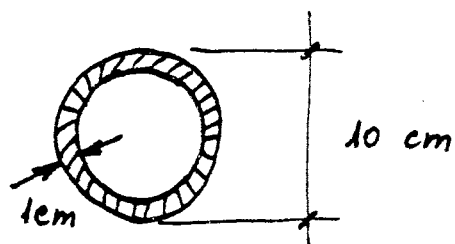
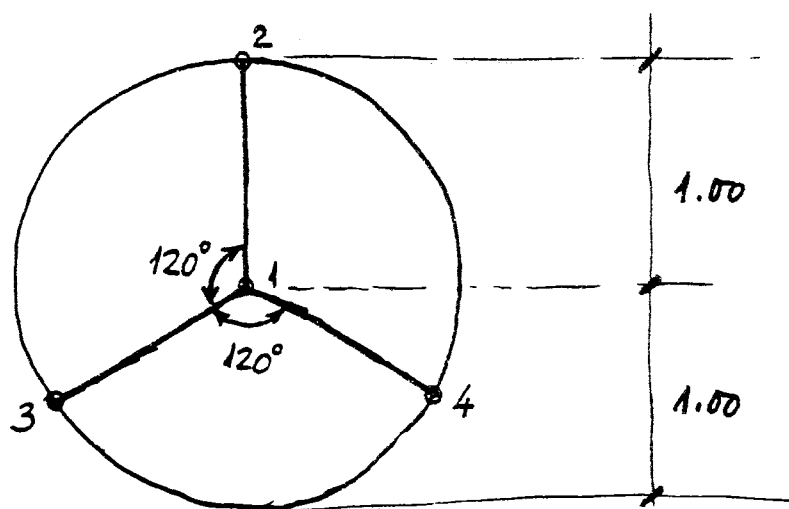


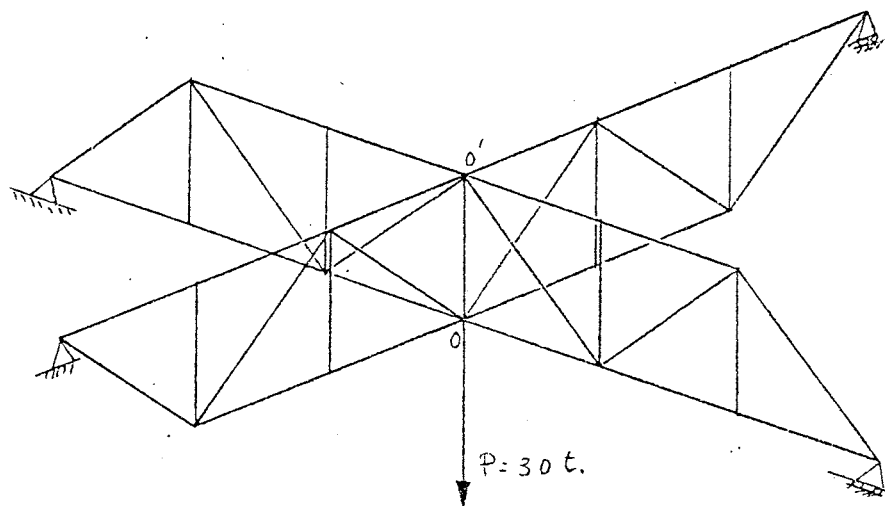
Figura. 5.29. Ejercicio 5.22.



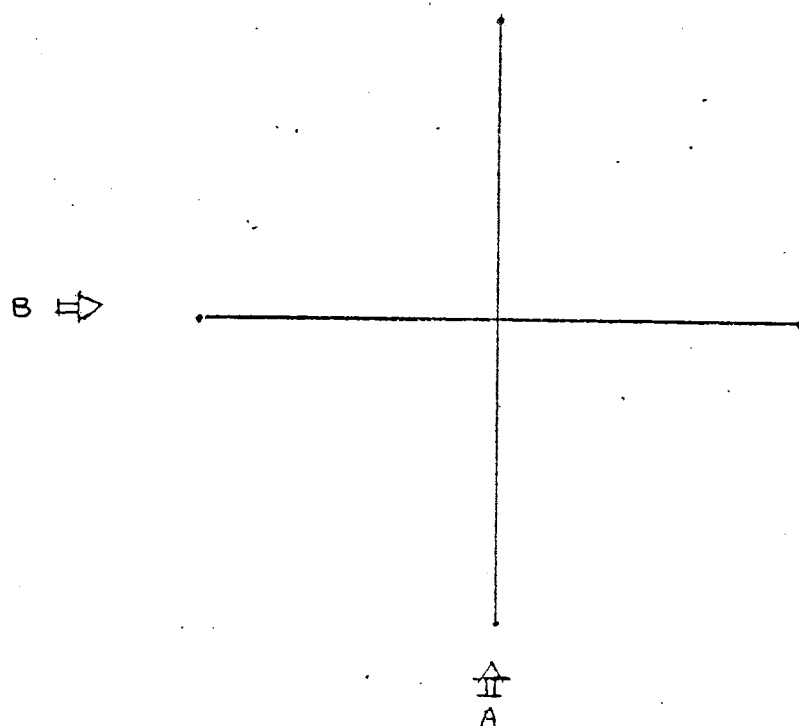
Sección de todas las barras

Figura 5.30. Ejercicio 5.24.

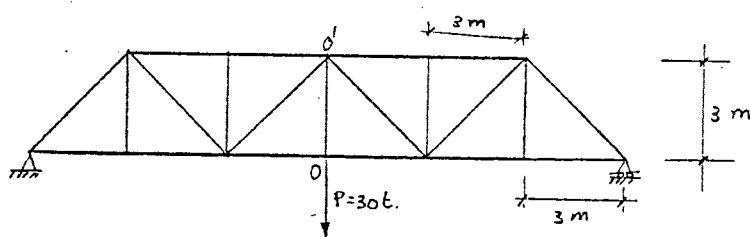
- 5.25. Un tipo estructural frecuente utilizado para cubrir grandes espacios regulares, está constituido por celosías espaciales. Su cálculo exige normalmente la utilización de un computador o bien la asimilación a estructuras continuas en la forma desarrollada, por ejemplo, por Makowski. En este ejercicio se presenta un caso muy simple de dos celosías planas que se cruzan en ángulo recto y que deben de resistir una carga concentrada de 30t, como indica la figura. Todas las barras son de sección constante de 10 cm^2 y $E = 2,0 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2}$. Determinar (a) Flecha máxima. (b) Esfuerzo en la barra 0-0'.
- 5.26. En la estructura articulada de la figura (a) todas las barras son de sección constante, formadas por perfiles de acero de sección cuadrada de lado 20 cm y 5 mm de espesor. Bajo la acción de unas cargas extraordinarias imprevistas en el cálculo, la barra 3-4 pandea y adquiere una deformada definitiva constituida por dos tramos circulares, tal como se indica en la figura (b). En estas condiciones y bajo la actuación de las cargas que se indican en la figura (a), determinar el incremento de flecha vertical que se produce en la sección A, respecto a la situación anterior al pandeo de la barra 3-4, es decir, cuando esta es recta y sin imperfecciones. $E = 2 \times 10^7 \text{ tm}^{-2}$.
- 5.27. Dibujar la deformada de la estructura de la figura. Las barras 1-2 y 8-9 son de hormigón $E_k = 300.000 \text{ kgcm}^{-2}$ y sección maciza de $0,25 \times 0,5 \text{ m}^2$. El resto de las barras son tubos de acero, de sección 10 cm^2 y módulo de elasticidad $E_a = 2 \times 10^6 \text{ kgcm}^{-2}$.
- 5.28. En la figura se representa de forma esquemática un arco triarticulado, semicircular, destinado a cubrir un gran pabellón comercial. Para la carga de 1 t/m de proyección horizontal indicada se desea dimensionar de forma aproximada los cordones superior e inferior de dicho arco. En un primer tanteo, se pueden suponer de igual área todas las barras de ambos cordones. Las tensiones admisibles son: Barras comprimidas: $\sigma_c = 0,8 \text{ t/cm}^2$. (con objeto de tener en cuenta la inestabilidad elástica); barras traccionadas: $\sigma_t = 1,2 \text{ t/cm}^2$. SE PIDE: Obtener el peso total de acero necesario para construir los citados cordones superior e inferior. Módulo de elasticidad del material: $2.000.000 \text{ Kg/cm}^2$. Peso específico del acero: $7,85 \text{ t/m}^3$.



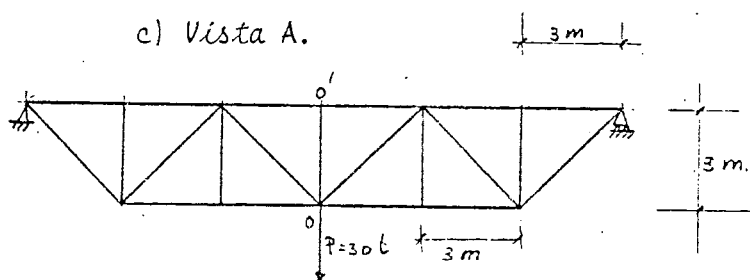
a) Perspectiva.



b) Planta.



c) Vista A.



d) Vista B.

Figura 5.31. Ejercicio 5.25.

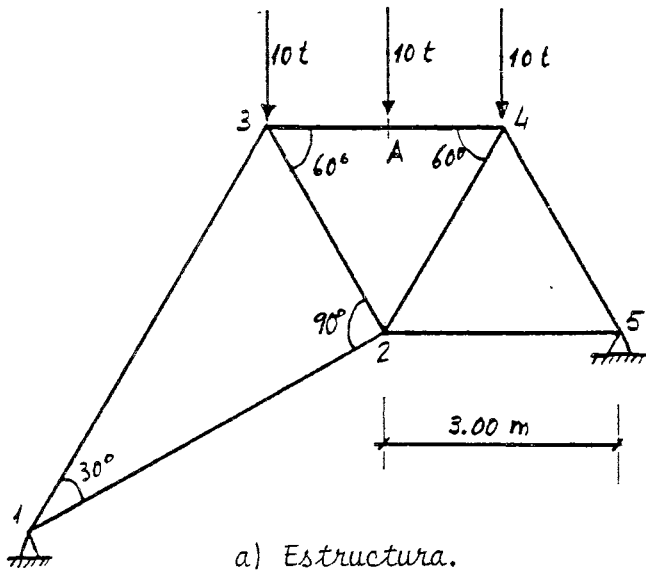


Figura 5.32. Ejercicio 5.26.

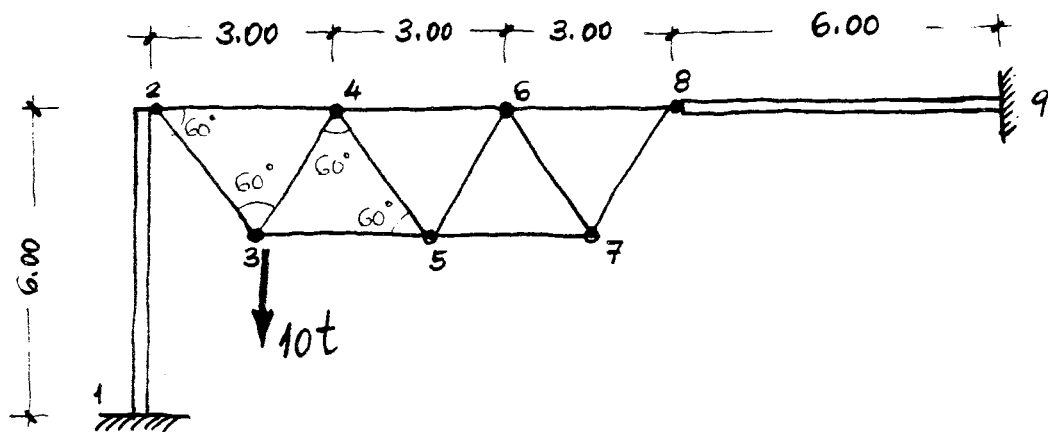


Figura 5.33. Ejercicio 5.27.

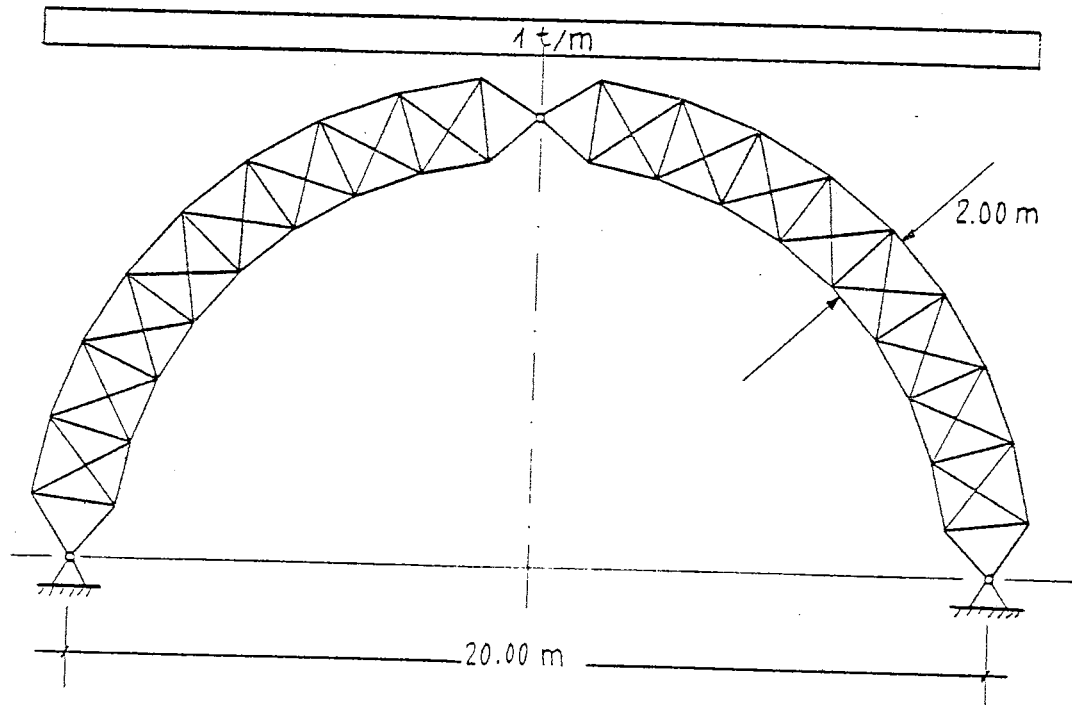


Figura. 5.34. Ejercicio 5.28.

EJERCICIOS. SOLUCIONES

5.2.

BARRA	l (cm)	$\Omega (\text{cm}^2)$	L/A	Δ^0	N^1	$\Delta^0 N^1$	$N^{12} L/E\Omega$	$N_F(t)$
1-3	856	30	28,53	0,41	0,384	0,157	2,000	-19,2
2-3	856	30	28,53	0,41	0,384	0,157	2,000	-19,2
1-4	832	25	33,25	0,40	0,631	0,252	6,286	-31,6
2-4	832	25	33,25	0,40	0,631	0,252	6,286	-31,6
3-4	400	16	25,00	0,19	0,225	0,043	0,600	11,3
							0,861	17,172

El estado 1 corresponde a una reacción horizontal unidad.

Ecuación de compatibilidad:

$$17,172 \times 10^{-3} X + 0,861 = 0; \quad X = -50,15 \text{ t};$$

La reacción es de $X = -50,14$ (comprimiendo la estructura).

5.5. $N_{12} = -4,23t$, $N_{23} = 4,72t$, $N_{25} = 2,89t$ y $N_{15} = -2,42t$.

5.6. $N_{12} = 01,33t$, $N_{13} = -0,76t$, $N_{23} = 1,14t$,

$N_{2-4} = -0,91t$ y $N_{3-4} = -1,33t$.

$v_3 = 1,97 \text{ mm}$ (hacia abajo).

5.7.

BARRA	N(t)	M(mt)
1	-0,374	0,415
2	-1,040	0,538
3	-1,122	1,245
4	-3,120	1,614
5	1,000	0

5.9.

BARRA	N^0	N^1	N
1-2	-9,0	0,85	-3,6
1-3	9,0	-1,73	-2,0
2-3	5,0	-0,47	2,0
2-4	-9,4	0,91	-3,6
3-4	2,3	-0,25	0,7
3-5	10,1	-1,75	-1,0
4-5	-2,2	-0,25	-3,8
4-6	-7,3	0,91	-1,5
5-6	5,2	-0,47	2,2
5-7	6,6	-1,73	-4,4
6-7	-8,7	0,85	-3,3

$$X = - \frac{\sum N_i^0 N_i^1}{\sum N_i^2} = 6,36t$$

$$N_i = N_i^0 + X N_i^1$$

5.10. (a) $X_1 = 11,55t$; $Y_1 = 2,42t$:

$$R_6 = 24,84t ; \quad R_{10} = -12,9t$$

(b)

BARRA	N
1-2	2,8
1-3	9,3
2-3	-6,0
2-4	0,5
3-4	11,8
3-5	0,5
4-5	0,5
2-6	4,4
4-6	12,3

$$N = 4,4 \cos \psi ; \quad M = 4,4L(\cos \psi - \frac{1}{2})$$

$$(-\frac{\pi}{3} \leq \psi \leq \frac{\pi}{3})$$

(c) $u = 0,0375 \text{ mm.}$

$$v = 0,4200 \text{ mm.}$$

5.11. Estructura dos veces hiperestática.

BARRA	N	BARRA	N
1-2	-12,0	8-9	0
1-3	2,6	8-10	4,3
2-3	-4,0	9-10	0
2-4	-9,1	9-11	3,5
3-4	4,6	10-11	0
3-5	-2,1	10-4	4,3
4-5	-3,4	11-4	3,5
4-6	0,7		
5-6	-3,2		
5-7	1,4		
6-7	-1,8		

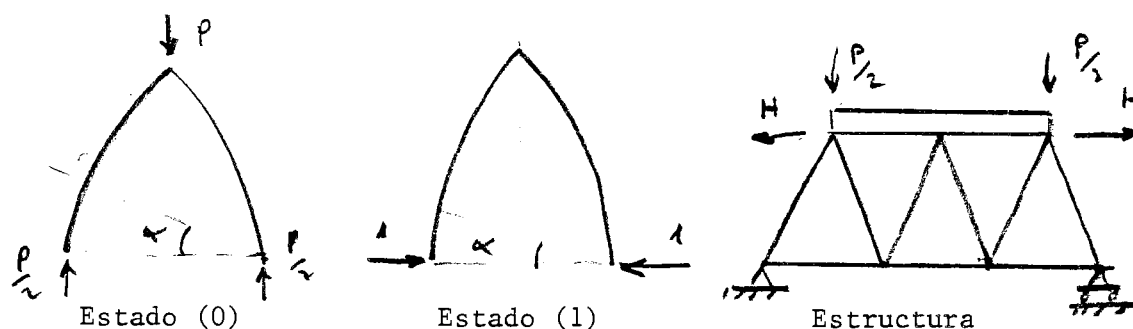
5.12. (a) $\delta_{2-4} = 0,812 \text{ mm.}$

(b) X acción sobre la barra curva. El área equivalente de esta es:
 $\Omega = 35,7.$

La ecuación de compatibilidad conduce a $X = -2,95.$

BARRA	1-2	1-3	2-3	2-5	3-4	3-5	4-5	4-6	5-6	Barra curva
N	-6,00	2,00	-8,52	-2,46	-1,16	2,95	-5,22	-1,10	0,90	-2,95

5.17. Estado del arco:



$$N^0 = -\frac{P}{2} \cos \alpha ; \quad M^0 = \frac{P}{2} R(1 - \cos \alpha) ; \quad \delta^0 = \frac{PR}{8E\Omega}(3 - 100N)$$

$$N^1 = -\text{sena} \alpha ; \quad M^1 = -R \text{sena} \alpha ; \quad \delta^1 = \frac{R}{E\Omega} \left(\frac{R}{3} - \frac{3}{4} \right) (1 + 100N)$$

$$H = -\frac{\delta^0}{\delta^1} = P \frac{100N - 3}{8 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \right) (100N + 1)}$$

Se estudian dos casos:

$$N=1, \delta^0 = -24,25P \times 10^{-5}; \quad \delta^1 = 124,06 \times 10^{-5}; \quad H = 15,636t$$

$$N=50, \delta^0 = -1249,25P \times 10^{-5}; \quad \delta^1 = 6143,23 \times 10^{-5}; \quad H = 16,268t$$

Adoptando como hiperestática la acción sobre la barra curva se obtiene la ecuación de compatibilidad:

$$N = 1: \quad -255,30 + X.18,41 = 0 \quad X = 13,87t$$

$$N = 50: \quad -259,08 + X.620,30 = 0 \quad X = 0,42t$$

BARRA	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5	4-6	5-6
(N=1)N ^F	-46,2	23,1	0	-21,3	0	23,1	0	-21,3	0
(N=50)N ^F	-46,2	23,1	0	-7,9	0	23,1	0	-7,9	0

5-7	6-7	2-6
23,1	-46,2	13,9
23,1	-46,2	0,4

En la barra curva la acción sobre ella es:

$$(N=1) \quad H = 15,636 - 13,87 = 1,77 \text{ t}$$

$$(N=50) \quad H = 16,268 - 0,42 = 15,85 \text{ t}$$

La flecha vertical del nudo 5 es:

$$(N=1) \quad v_5 = 8,28 \text{ mm}; \quad (N=50) \quad v_5 = 3,62 \text{ mm}.$$

5.18. Se consideran como estados hiperestáticos 1 y 2, los correspondientes a esfuerzos ($N_{1-3} = 1$ y $N_{4-5} = 0$), y ($N_{4-5} = 0$ y $N_{2-6} = 0$) respectivamente. El estado 0 se determina con $N_{1-3} = 0$ y $N_{4-5} = 0$.

$$(10+6\sqrt{3})X_1 + (8+6\sqrt{3})X_2 = 20 \quad X_2 = -0,0659$$

$$(8+6\sqrt{3})X_1 + (36+6\sqrt{3})X_2 = 20 \quad X_1 = -0,9220$$

BARRA	1-2	1-5	1-6	2-3	2-6	3-4	3-6	4-6	5-6
N	-0,16	-9,47	1,46	-0,16	0,16	2,08	-4,31	1,61	-4,16

5.22. El estado (0) corresponde al nudo sin rozamiento. El estado (1) se supone cargado con sendos momentos unidad en las barras 4-5 y 5-6.

La ecuación de compatibilidad es:

$$\sum_{i=1}^B (N_i^0 + X N_i^1) \frac{1}{E\Omega} N_i = -k X ; \quad k = \frac{\Delta\theta}{M} = 2 \times 10^{-5}$$

$$X = -7,6$$

BARRA	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5	4-6	5-6
N	-15,00	13,30	6,67	-13,30	7,50	6,70	-1,29	-6,89	6,70

$$5.24. \frac{1}{E\Omega} = 1,68 \times 10^{-3} \text{ cm/t} \quad (\text{barras rectas})$$

$$\frac{1}{E\Omega} = 449 \times 10^{-3} \text{ cm/t} \quad (\text{barras curvas})$$

$$\text{Acercamiento} = 3,43 \text{ cm.}$$

$$5.25. (a) \ v = 21,3 \text{ mm} \quad (b) \ N_{00'} = 9,65 \text{ t.}$$

$$5.26. \text{Elongabilidad equivalente } (1/E\Omega)_{eq} = 0,032804 \text{ cm/t.}$$

$$\text{Flecha propia de la barra curva: } f^0 = 0,3173 \text{ cm.}$$

$$1^{\text{er}} \text{ caso: } f = 1,17 \text{ cm.}$$

$$2^{\circ} \text{ caso: } f = 1,88 \text{ cm.}$$

$$\text{Incremento } \Delta f = 7,1 \text{ mm.}$$

5.27. Las deformaciones para el diagrama de Williot son:

BARRA	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5	4-6	5-6	5-7	6-7	6-8	7-8
Δ	14,40	-7,04	3,00	5,70	-3,00	-4,19	3,00	2,85	-3,00	-1,19	3,00

Nudo 2.- Desplazamientos $u = 12,44 \times 10^{-4}$ m.

$$v = 0$$

Nudo 8.- Desplazamientos $u = 0$

$$v = 192 \times 10^{-4}$$
 m.

$$5.28. N_1 = \frac{1}{2}(45 \operatorname{sen} \theta - 40 \operatorname{sen}^2 \theta - 10)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(60 \operatorname{sen}^2 \theta - 55 \operatorname{sen} \theta - 10)$$

$$\frac{dN_1}{d\theta} = 0$$

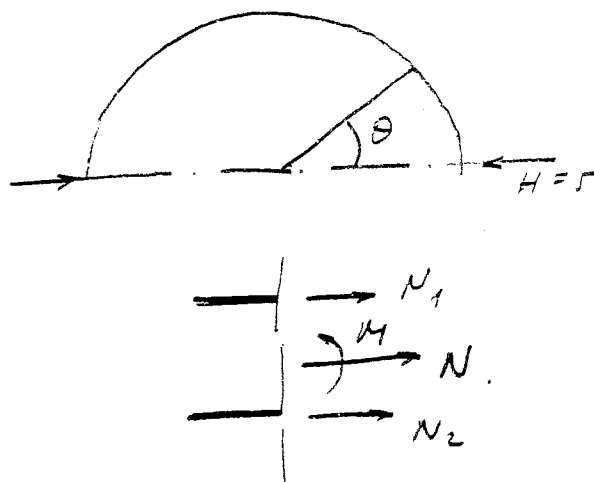
$$N_1 = -2,5$$

$$N_1 = 1,33$$

$$\frac{dN_2}{d\theta} = 0$$

$$N_2 = -2,5$$

$$N_2 = -11,30$$



Se consideran las soluciones divididas en 9 partes.

θ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
N_1	-5	-1,70	0,36	1,25	1,20	0,5	-0,51	-1,52	-2,24	-2,50
N_2	-5	-8,87	-10,90	-11,25	-10,29	-8,46	-6,32	-4,35	-2,99	-2,50

$$\Omega_1 \quad 6,25 \quad 2,13 \quad 1,04 \quad 1,11 \quad 1,00 \quad 0,64 \quad 1,90 \quad 2,80 \quad 3,13$$

$$\Omega_2 \quad 11,09 \quad 13,63 \quad 14,13 \quad 14,05 \quad 12,85 \quad 10,85 \quad 7,90 \quad 5,44 \quad 3,37$$

Por consiguiente, el peso es: $P = 0,6014t$.

Si se tomase Ω_1 máx y Ω_2 máx constante resultaría el peso:

$$P = 0,9858 \text{ t}$$

CAPITULO 6.- TEOREMAS ENERGETICOS

6.1.- Introducción

Como se ha indicado en el capítulo 2, el cálculo de una estructura se plantea mediante tres grupos de ecuaciones. Las primeras de equilibrio relacionan magnitudes estáticas y las duales en movimientos corresponden a las ecuaciones de compatibilidad. El nexo entre las magnitudes que intervienen en ambos grupos de ecuaciones se efectúa con las ecuaciones constitutivas del material.

Los métodos de cálculo de estructuras basados en las relaciones anteriores se denominan directos, y todos ellos se caracterizan básicamente en el orden o técnica de resolución de las ecuaciones estructurales.

Existen unas alternativas de cálculo de estructuras, que si bien conducen a idénticas ecuaciones y resultados, su formulación es básicamente diferente. El carácter de estos métodos, denominados indirectos y que se basan en principios energéticos, es eminentemente global, a toda la estructura, en contraste con los métodos directos, cuyo planteamiento local (en un elemento diferencial, rebanada o elemento estructural) es evidente y se integra o compone posteriormente a toda la estructura.

A continuación se exponen los dos principios energéticos fundamentales del cálculo lineal de estructuras: Uno de ellos, asociado en los movimientos virtuales y denominado del trabajo virtual. El otro, conocido como principio del trabajo complementario virtual relaciona fuerzas virtuales.

En ambos principios y sus consecuencias, se asumen las siguientes hipótesis de linealidad estática (pequeños movimientos) y cinemática (pequeñas deformaciones) pero con objeto de alcanzar una mayor generalidad se considera material no lineal. Por otra parte, se supone no existen fuerzas disipadoras de energía y que las estructuras son elásticas y conservativas, en el sentido que la energía de deformación de estas sólo depende de sus configuraciones inicial y final, pero es independiente de la historia de la carga.

6.2.-Trabajo y energía de deformación y sus contrapartidas complementarias

Sea una estructura, en la que actúa una fuerza Q , en un gdl produciendo un movimiento eficaz q_1 . Se supone que existe una relación entre ambas magnitudes, monotónica creciente, en el sentido de que al incrementar la fuerza Q_1 el movimiento q_1 aumenta. Esta situación ocurre en la mayoría de las estructuras estables -es decir, con cargas lejanas de la crítica que produce la inestabilidad. Se puede evaluar el trabajo W que realiza la fuerza Q al crecer gradualmente desde un valor nulo a un nivel Q , que produce el movimiento q , simplemente mediante la integral:

$$W = \int_0^q Q_1 dq_1 \quad (6.1)$$

El valor del trabajo está representado por el área de la figura 4.1, en donde la relación Q_1 - q_1 se supone general, es decir, no lineal ya que el material no es necesariamente hookeano.

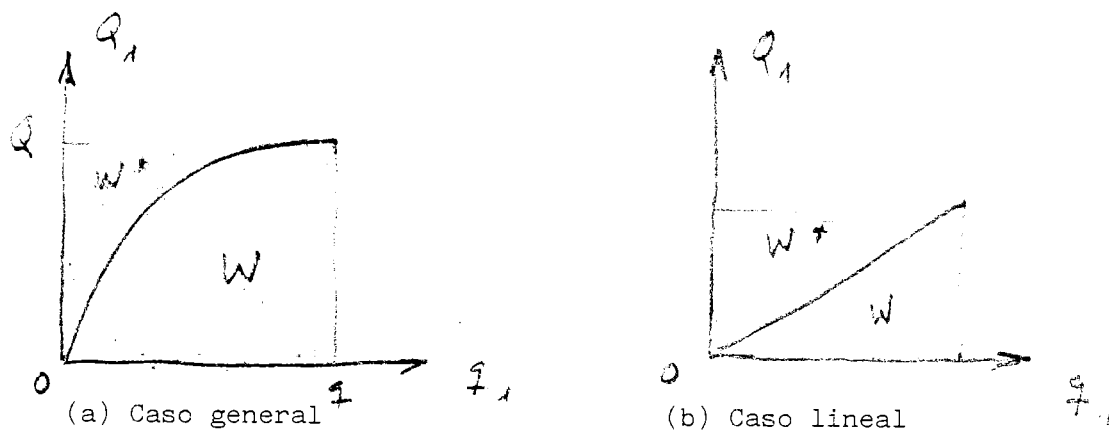


FIGURA 6.1.- Trabajo y trabajo complementario.

Si se considera M gdl en la estructura, en las que actúan las fuerzas Q_1, Q_2, \dots, Q_M , produciendo los movimientos eficaces q_1, q_2, \dots, q_M respectivamente, el trabajo W se obtendría, al ser en escalas, por simple suma, o sea:

$$W = \int \sum_{i=1}^M Q_i dq_i = \int \underline{Q}^T d\underline{q} = \int d\underline{q}^T \underline{Q} \quad (6.2)$$

en donde, las integrales se evalúan entre los correspondientes valores inicial y final de la carga. Los vectores de cargas \underline{Q} y movimiento \underline{q} se definen como vectores columnas, es decir:

$$\underline{Q}^T = \{ Q_1, Q_2, \dots, Q_M \} \text{ y } \underline{q}^T = \{ q_1, q_2, \dots, q_M \}$$

De un modo dual, se define el trabajo complementario realizado por los movimientos q_i abajo la aplicación de la carga Q_i a la siguiente integral; es decir el área es representada en la figura 4.1.

$$W^* = \int \sum_{i=1}^N q_i dQ_i = \int \underline{q}^T d\underline{Q} = \int d\underline{Q}^T \underline{q} \quad (6.3)$$

En el caso de estructuras lineales, se cumple evidentemente, la igualdad de ambos trabajos:

$$W = W^*$$

Las fórmulas anteriores pueden extenderse a estructuras con infinitos grados de libertad, sustituyendo las sumas finitas anteriores por integrales, es decir:

Si $Q = Q(\underline{x})$ representa la intensidad en el punto $\underline{x} \in \Omega$ de la distribución de carga sobre un dominio (longitud, área o volumen) y $q = Q(\underline{x})$ los movimientos eficaces correspondientes se pueden escribir:

$$W = \int_0^{\bar{Q}} \int_{\Omega} Q(\underline{x}) \delta q(\underline{x}) d\Omega$$

$$W^* = \int_0^{\bar{Q}} \int_{\Omega} Q(\underline{x}) \cdot q(\underline{x}) \cdot d\Omega$$

Por otra parte, bajo la acción de la carga Q_i aparecen unas tensiones σ en la estructura, que los equilibran. Además los movimientos q_i generan unas deformaciones ϵ compatibles con ellos. Para cada pareja de tensión-deformación eficaces, existe una relación asimismo monotónica creciente (figura 4.2), que produce un trabajo de deformación por unidad de volumen, al aumentar progresivamente bajo la influencia de las cargas y movimientos crecientes, dado por la expresión:

$$\int_0^{\epsilon} \sigma \, d\epsilon \quad (6.4)$$

extendida la integral desde el valor nulo inicial hasta el del estado final de carga. La energía de deformación U de todas las estructuras se obtendría directamente multiplicando la integral anterior (6.4) por el volumen elemental dV y se extendería la integral anterior a todo el volumen de la estructura, resultando:

$$U = \int_V \left(\int_0^{\epsilon} \sigma \, d\epsilon \right) dV \quad (6.5)$$

Análogamente la energía de deformación complementaria por unidad de volumen es:

$$\int_0^{\sigma} \epsilon \, d\sigma \quad (6.6)$$

que extendida a todo el volumen de la estructura permite obtener la energía total de deformación complementaria U^* , es decir:

$$U^* = \int_V \left(\int_0^\sigma \epsilon \, d\sigma \right) dV \quad (6.7)$$

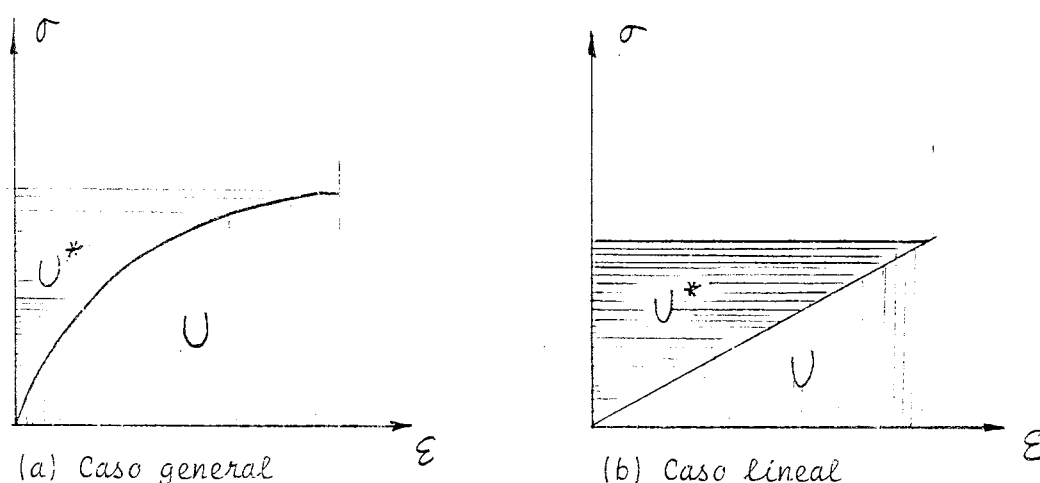


FIGURA 6.2.- Energías de deformación y de deformación complementaria.

Si existiese una deformación inicial impuesta ϵ_0 ó bien una tensión inicial (pretensado) σ_0 las expresiones (6.4) y (6.6) anteriores, se modificarían para incluir estos términos convirtiéndose en:

$$\int_0^\epsilon (\sigma + \sigma_0) d\epsilon \quad \text{y} \quad \int_0^\sigma (\epsilon + \epsilon_0) d\sigma$$

respectivamente.

En el caso de estructuras articuladas isostáticas con cargas en nudos, las energías de deformación y de deformación complementarias, son:

$$U = \sum_{i=1}^B \int_0^{\Delta_i} \{N_i(\Delta_i) + N_i^0\} d\Delta_i \quad (6.8)$$

$$y \quad U^* = \sum_{i=1}^B \int_0^{N_i} \{ \Delta_i(N_i) + \Delta_i^0 \} dN_i \quad (6.9)$$

En lo que sigue se hará referencia a este tipo particular de estructuras, si bien, los resultados son generales aplicados a toda clase de estructuras.

Si la estructura es lineal, es decir, el material es elástico y sigue la ley de Hooke, las expresiones anteriores se convierten en las siguientes:

$$U = \sum_{i=1}^B \left(\frac{1}{2} \frac{E\Omega_i}{l_i} \Delta_i^2 + N_i^0 \Delta_i \right)$$

$$y \quad U^* = \sum_{i=1}^B \left(\frac{1}{2} \frac{N_i^2}{E\Omega_i l_i} + N_i \Delta_i^0 \right)$$

Evidentemente, si la estructura es conservativa, el trabajo exterior realizado por las fuerzas Q_i sobre los movimientos q_i , es igual a la energía de deformación acumulada en la estructura, o sea:

$$W = U \quad (6.10)$$

o equivalentemente:

$$W^* = U^* \quad (6.11)$$

6.3.- Expresión de las variaciones del trabajo y de la energía de deformación

Se supone un sólo grado de libertad, en el que actúa una fuerza Q_i que ha producido un movimiento q_i . En este estado de equilibrio, se introduce una modificación (variación al movimiento) δq_i con lo que la

fuerza varía al nuevo valor $Q_i + \delta Q_i$ para alcanzar la nueva posición de equilibrio. Es interesante conocer la variación total que se ha producido en el trabajo exterior ΔW entre los dos estados. Según la figura 6.3, se puede escribir:

$$\Delta W = \delta^1 W + \frac{1}{2} \delta^2 W + O(\delta^3 W) \quad (6.12)$$

con

$$\delta^1 W = Q_i \delta q_i$$

$$\delta^2 W = \delta Q_i \delta q_i$$

siendo $\delta^1 W$ y $\delta^2 W$ la primera y la segunda variación del trabajo y $O(\delta^3 W)$ representa términos de orden 3 o superior.

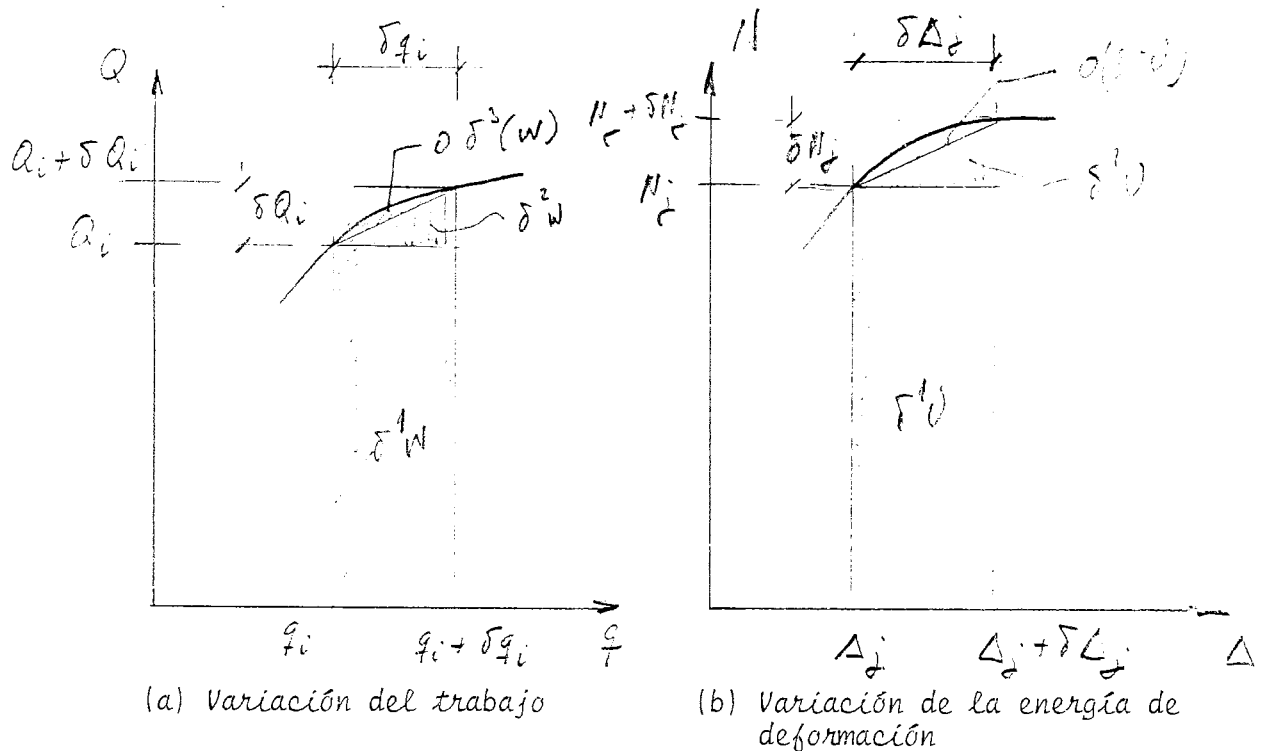


FIGURA 6.3.- Incrementos del trabajo y energía de deformación.

Análogamente, el incremento de la energía de deformación es:

$$\Delta U = \delta^1 U + \frac{1}{2} \delta^2 U + O(\delta^3 U) \quad (6.13)$$

con

$$\begin{aligned} \delta^1 U &= N_j \delta \Delta_j \\ \delta^2 U &= \delta N_j \delta \Delta_j \end{aligned}$$

Si existen M grados de libertad, se obtienen las variaciones anteriores mediante suma o como producto de vectores columna:

$$\delta^1 W = \sum_{i=1}^M Q_i \delta q_i = \underline{Q}^T \underline{\delta q} = \underline{\delta q}^T \underline{Q} \quad (6.14)$$

$$\delta^2 W = \sum_{i=1}^M \delta Q_i \delta q_i = \delta \underline{Q}^T \cdot \underline{\delta q} = \underline{\delta q}^T \delta \underline{Q}$$

y suponiendo la existencia de B barras en la estructura articulada:

$$\delta^1 U = \sum_{j=1}^B N_j \delta \Delta_j = \underline{N}^T \delta \underline{\Delta} = \underline{\delta \Delta}^T \underline{N} \quad (6.15)$$

$$\delta^2 U = \sum_{j=1}^B \delta N_j \delta \Delta_j = \underline{\delta N}^T \cdot \underline{\delta \Delta} = \underline{\delta \Delta}^T \delta \underline{N}$$

6.4.- Principio de los trabajos virtuales

6.4.1. Enunciado

Antes de enunciar este principio, es conveniente introducir algunos conceptos.

Movimientos virtuales $\delta \underline{q}$ es un conjunto de movimientos cinemáticamente admisibles -satisfacen las condiciones de compatibilidad y apoyos- para los cuales no se produce variación de las fuerzas exteriores ($\delta \underline{Q} = \underline{0}$). Constituyen movimientos ideales ya que no son físicamente posibles (*) dado el carácter monotónico de las curvas $Q-q$. Así pues, si se consideran movimientos virtuales, la variación de trabajo, ΔW se reduce a la primera variación, es decir:

$$\Delta W = \delta^1 W \quad (6.16)$$

y se denomina trabajo virtual.

Las deformaciones $\delta \underline{\Delta}$ compatibles con los movimientos virtuales $\delta \underline{q}$, que se producen en la estructura se denominan deformaciones virtuales. Por definición, no modifican los esfuerzos existentes en las barras de la estructura, $\delta \underline{N} = 0$ y por lo tanto, la energía de deformación virtual que generan es:

$$\Delta U = \delta^1 U \quad (6.17)$$

El principio de los trabajos virtuales establece la igualdad:

$$\delta^1 W = \delta^1 U \quad (6.18)$$

o alternativamente se enuncia:

La condición necesaria y suficiente para que una estructura bajo las fuerzas \underline{Q} y unas fuerzas \underline{N} se encuentre en equilibrio, implica que para un conjunto arbitrario de movimientos virtuales $\delta \underline{q}$ y sus deformaciones compatibles correspondientes $\delta \underline{\Delta}$ el trabajo y la energía de deformación virtuales sean iguales, por lo tanto se cumple:

(*) Dentro de una primera aproximación se pueden considerar los movimientos y deformaciones virtuales, suficientemente pequeños por lo que es razonable despreciar contribuciones de orden superior en las variaciones del trabajo (ΔW) y de la energía de deformación (ΔU).

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \text{equilibrio} \\
 \delta \underline{q}^T \underline{Q} = \delta \underline{\Delta}^T \underline{N} \\
 \uparrow \text{compatible} \quad \uparrow \\
 \text{arbitrario}
 \end{array}
 \quad (6.19)$$

6.4.2.- Teorema del movimiento unidad

Si en la expresión (6.19) se supone el siguiente movimiento virtual (un movimiento δq en gdl i):

$$\begin{aligned}
 \delta q_i &= \delta q \\
 \delta q_j &= 0 \quad \text{para} \quad j \neq i
 \end{aligned}
 \quad (6.20)$$

que genera las deformaciones compatibles virtuales $\delta \underline{\Delta}$, se obtiene:

$$\delta q \cdot Q_i = \delta \underline{\Delta}^T \underline{N}$$

si la estructura es cinemáticamente lineal, las deformaciones $\delta \underline{\Delta}$ puede expresarse como sigue:

$$\delta \underline{\Delta} = \delta q \cdot \underline{\Delta}^1$$

siendo $\delta \underline{\Delta}^1$ las deformaciones compatibles con un movimiento unidad en el gdl i y nulas en los restantes gdl. Por lo tanto se deduce:

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \text{equilibrio} \\
 1 \cdot Q_i = \underline{\Delta}^{1T} \cdot \underline{N} = \sum_{i=1}^B N_i \Delta_i^1 \\
 \uparrow \text{compatible}
 \end{array}
 \quad (6.21)$$

Ejemplo 6.1.

Plantear el teorema del movimiento unidad en el gdl (movimiento vertical) del nudo 5 de la figura 6.4.

Se introduce un movimiento vertical $\overline{5-5'} = 1$ y unas deformaciones compatibles son:

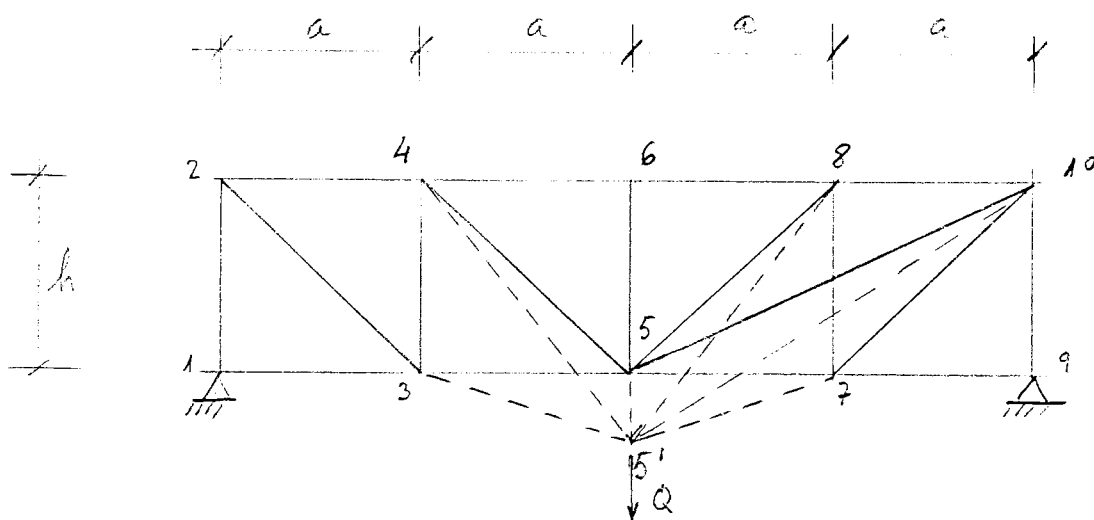


FIGURA 6.4.- Ejemplo 6.1.

$$\Delta_{5-5} = 0, \quad \Delta_{5-4} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}, \quad \Delta_{5-6} = 1, \quad \Delta_{5-8} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}},$$

$$\Delta_{5-7} = 0, \quad \Delta_{5-10} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4a^2}}$$

y en las restantes nulas.

Con lo que resulta, la ecuación de equilibrio (fuerza vertical del nudo 5):

$$Q = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} N_{5-4} + N_{5-6} + \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} N_{5-8} + \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4a^2}} N_{5-10}$$

6.4.3.- Teorema de la energía potencial total estacionaria

Se suponen que las fuerzas \underline{Q} provienen de un campo potencial, U_e , ya que la estructura es conservativa, se deduce para la variación del trabajo:

$$\delta^1 W = \underline{Q}^T \delta \underline{q} = \sum_{i=1}^M Q_i \delta q_i = -\delta^1 U_e \quad (6.22)$$

Por lo tanto, el principio de los trabajos virtuales se transforma, en la siguiente igualdad:

$$\delta^1 W = \delta^1 U = -\delta^1 U_e ,$$

es decir:

$$\delta^1 (W + U_e) = \delta^1 V = 0 \quad (6.23)$$

con $V = W + U_e$ la energía potencial total de la estructura, que se observa es estacionaria.

La expresión (6.23) es equivalente a la siguiente:

$$\delta^1 V = \sum_{i=1}^M \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i = \delta \underline{q}^T \cdot \frac{\partial V}{\partial \underline{q}} = \delta \underline{q}^T \cdot \underline{\nabla} V$$

y como los movimientos virtuales son independientes resultan las condiciones:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad \text{ó bien} \quad \frac{\partial V}{\partial \underline{q}} = \underline{\nabla} V = 0$$

que corresponden al equilibrio de las fuerzas y esfuerzos en los diferentes gdl i .

6.4.4.- Primer teorema de Castigliano

Se puede observar que según el principio de los trabajos virtuales:

$$\delta^1 U = \delta^1 W = \sum_{i=1}^M Q_i \delta q_i = \delta \underline{q}^T \underline{Q} \quad (6.24)$$

la energía de deformación U es función de los movimientos q_i , ya que se suponen constantes las fuerzas \underline{Q} en equilibrio con los esfuerzos \underline{N} .

Desarrollando en serie de Taylor, el incremento de la energía de deformación $U = U(\underline{q})$, al variar \underline{q} a $\underline{q} + \delta \underline{q}$ se obtiene:

$$\Delta U = \sum_{i=1}^M \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j + O(\delta^3) \quad (6.25a)$$

o bien, en forma matricial:

$$\Delta U = \underline{\delta q}^T \underline{\nabla U} + \frac{1}{2} \underline{\delta q}^T \underline{H} \underline{\delta q} + O(\delta^3) \quad (6.25b)$$

La matriz \underline{H} se denomina matriz hessiana (*) y $\underline{\nabla U}$ es el gradiente de la energía de deformación U .

Comparando las variaciones primeras de las ecuaciones (6.25) con (6.14), se deduce:

(*) Se observa que la igualdad de las variaciones segundas de (6.25) y (6.14) conducen a la igualdad $\underline{H} \underline{\delta q} = \delta \underline{Q}$, que representa la matriz \underline{H} como la de rigidez tangente o incremental entre $\underline{\delta q}$ y $\delta \underline{Q}$.

$$\delta^1 U = \delta \underline{q}^T \underline{\nabla} U = \delta^1 W = \delta \underline{q}^T \underline{Q}$$

o bien

$$\delta \underline{q}^T (\underline{Q} - \underline{\nabla} U) = 0$$

Como $\delta \underline{q}^T$ es un vector arbitrario resulta:

$$\underline{Q} = \underline{\nabla} U \quad (6.26)$$

o bien

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

que constituye el primer teorema de Castigliano, que expresa una fuerza como la derivada de la energía de deformación con respecto al movimiento eficaz.

6.4.5.- Teorema de la energía de deformación mínima

Se va a demostrar a continuación que si se comparan dos estados posibles compatibles de deformación asociados con un conjunto dado de movimientos (ellos mismos no son suficientes para determinar completamente el estado de deformación), entonces el verdadero estado de deformación correspondiente a la situación de equilibrio, produce una energía de deformación mínima.

Se considera la estructura con unos movimientos impuestos q , que produce unas reacciones (fuerzas) en su dirección Q , y por consiguiente aparecen unas deformaciones Δ compatibles con los movimientos y unos esfuerzos N en equilibrio con las acciones exteriores. Si existen diferentes estados de deformación compatibles con q , que según las condiciones constitutivas de cada barra originan unos esfuerzos N , al estado Δ que minimiza U corresponde al que los esfuerzos N originados equilibran a fuerzas exteriores Q .

Para demostrar este teorema se consideran un número M' arbitrario de gdl adicionales e independientes de los M de la estructura, para los cuales las fuerzas correspondientes $Q'_i = 0$ y los movimientos $q'_i \neq 0$ corresponden a los que se producen en la estructura bajo las cargas Q en equilibrio con los esfuerzos N , que se deforma en las cantidades Δ y con unos movimientos compatibles q . Se adopta como movimientos virtuales los siguientes:

$$\delta q_i = 0 \quad (\text{para } i = 1, 2, \dots, M)$$

en los gdl de la estructura para los que existen las fuerzas Q_i .

$$\delta q'_i \neq 0 \quad (\text{para } i = 1, 2, \dots, M')$$

en los gdl adicionales en las que las fuerzas aplicadas son nulas $Q'_i = 0$.

$$\delta^1 W = \sum_{i=1}^M Q_i \delta q_i + \sum_{i=1}^{M'} Q'_i \delta q'_i = 0 \quad (6.27)$$

y por consiguiente la energía de deformación es estacionaria, puesto que por el principio de los trabajos virtuales se puede escribir:

$$\delta^1 W = \delta^1 U = 0 \quad (6.28)$$

o bien según el primer teorema de Castigliano:

$$Q'_i = \frac{\partial U}{\partial q'_i} = 0 \quad (6.29)$$

Las ecuaciones (6.28) y (6.29) expresan cada una el estado estacionario de la energía de deformación con relación a los movimientos (y deformaciones compatibles).

Por otra parte, si se observa el signo de la variación segunda del trabajo, se deduce que en las estructuras estables es positivo.

En efecto, el incremento de trabajo realizado por los movimientos virtuales δq_i y $\delta q'_i$, es:

$$\Delta W = \delta^1 W + \frac{1}{2} \delta^2 W + O(\delta^3 W) = \frac{1}{2} \delta^2 W + O(\delta^3 W)$$

pero

$$\delta^2 W = \sum_{i=1}^M \delta Q_i \delta q_i + \sum_{i=1}^{M'} \delta Q'_i \delta q'_i = \sum_{i=1}^{M'} \delta Q'_i \delta q'_i = \delta \underline{Q}'^T \delta \underline{q}' \quad (6.30)$$

es siempre positiva, supuesto que las relaciones fuerza-movimientos sean crecientes monotónicamente (*).

Este trabajo ΔW es igual a ΔU y por lo tanto, se deduce que $\delta^2 U > 0$, lo que implica que U representa un mínimo de energía. En efecto, cualquier variación de los movimientos $\delta q'_i$ respecto a los existentes q_i (Q_i no varían) supone un cambio de la energía de deformación a un valor mayor $U + \frac{1}{2} \delta^2 U$ que el primitivo U .

El teorema se enuncia como sigue:

Configuraciones de movimientos \underline{q} compatibles con las deformaciones $\underline{\Delta}$, para las cuales los correspondientes esfuerzos \underline{N} están en equilibrio con las fuerzas aplicados \underline{Q} , representan configuraciones de energía de deformación U mínima.

(*) La expresión (6.30) puede ponerse en la forma hessiana $\delta \underline{q}'^T \underline{H} \delta \underline{q}$ que es siempre positiva para $\delta \underline{q} \neq 0$, por lo tanto \underline{H} , constituye una matriz positiva definida.

Las consecuencias de este teorema son varias. Con la misma notación anterior se considera el estado 1 correspondiente a una posición de equilibrio de las fuerzas Q_j sobre una estructura definida ahora no sólo por los movimientos q_i sino por el conjunto q_i y $q_i' \neq 0$, tal que $\delta q_i' \neq 0$. Por otra parte se utilizan únicamente las coordenadas q_i para definir esta configuración de equilibrio y que por lo tanto, es una aproximación de la exacta definida en el estado 1. Este nuevo estado para el cual se introducen las coacciones $\delta q_i' = 0$ se denomina estado 2.

Al comparar ambos estados 1 y 2, se deduce del teorema de la energía de deformación mínima, la desigualdad:

$$U^1 < U^2$$

Por otra parte, la expresión de cada una de las energías de deformación son:

$$U^1 = \int_0^{\bar{\Delta}} \underline{N}^T \delta \underline{\Delta} = \int_0^{\bar{q}} \underline{Q}^T \delta \underline{q} + \int_0^{\bar{q}} \underline{Q}'^T \delta \underline{q}' = \int_0^{\bar{q}} \underline{Q}^T \delta \underline{q}$$

o

$$U^2 = \int_0^{\bar{\Delta}} (\underline{N} + \delta \underline{N}) \delta \underline{\Delta} = \int_0^{\bar{q}} (\underline{Q} + \delta \underline{Q})^T \delta \underline{q}$$

La variación primera de la energía de deformación en el estado 2 se deduce al introducir unos movimientos virtuales δq (indénticos a los considerados en el estado 1) pero ahora con las restricciones de que $\delta q' = 0$ por lo que en él aparecen fuerzas $\delta Q'$ que equilibran a los δQ en los gdl q .

Por lo tanto, se obtiene:

$$\int_0^{\bar{q}} \underline{Q}^T \delta \underline{q} < \int_0^{\bar{q}} (\underline{Q} + \delta \underline{Q})^T \delta \underline{q}$$

que implica $\delta Q_i > 0$ para todo i .

Si se representa la curva relación fuerzas-movimientos para un gdl (figura 6.5) se observa que para el estado 2, la estructura es mas rígida. Por lo tanto, se deduce de la misma las siguientes conclusiones:

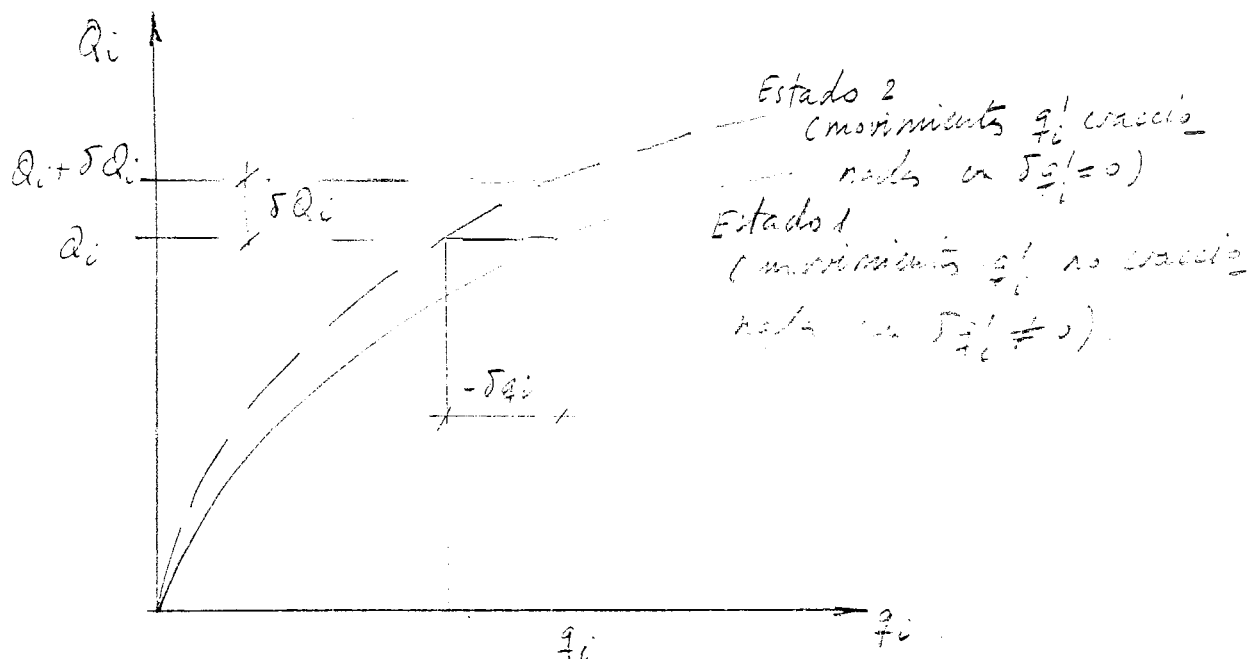


FIGURA 6.5.- Relación fuerza-movimiento en el caso de gdl con movimientos coaccionados y libres.

- (1) Para los mismos movimientos q_i , la energía de deformación se incrementa cuando se introducen coacciones $\delta q_i' = 0$, en las configuraciones desplazadas $-q_i$ y q_i son movimientos independientes-. Por el contrario cuando se eliminan esas coacciones la energía de deformación disminuye.
- (2) Para un conjunto dado de fuerzas Q_j la energía de deformación disminuye al introducir las coacciones $\delta q_i' = 0$. Inversamente la energía de deformación se incrementa cuando se eliminan las citadas coacciones.
- (3) Para un conjunto dado de fuerzas la energía de deformación es un máximo cuando ninguna coacción se introduce en los movimientos.

Ejemplo 6.2.

Calcular la configuración de equilibrio en la estructura con dos gdl de la figura, mediante el teorema de la energía potencial mínima.

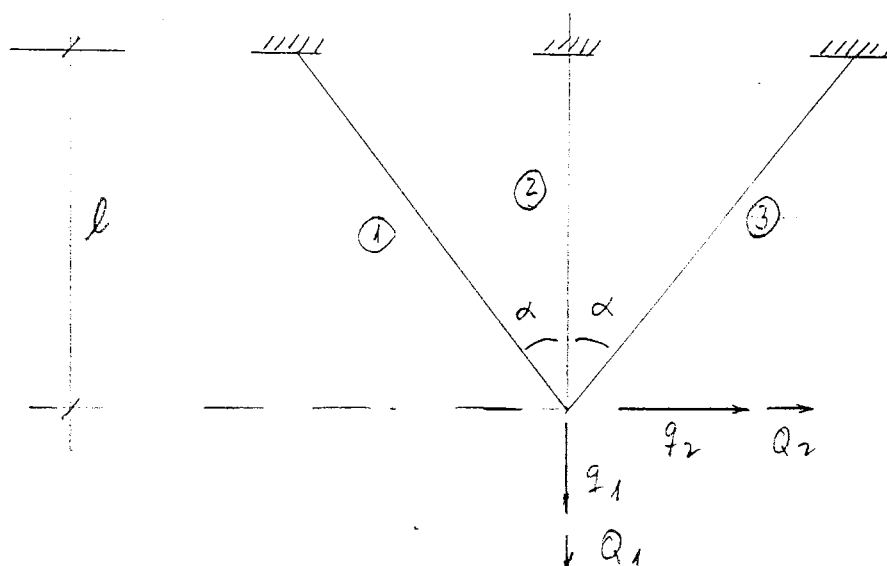


FIGURA 6.6.- Ejemplo 6.2.

Las fuerzas actuantes son Q_1 y Q_2 . Las barras son de sección idéntica $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega$ y sus longitudes son:

$$l_1 = l_3 = \frac{l}{\cos \alpha} \quad \text{y} \quad l_2 = l$$

Se adoptan como incógnitas básicas los movimientos q_1 y q_2 .

Las deformaciones de las barras son Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 . Su expresión en función de los movimientos se deducen mediante las ecuaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= q_1 \cos \alpha + q_2 \operatorname{sen} \alpha \\ \Delta_2 &= q_1 \\ \Delta_3 &= q_1 \cos \alpha - q_2 \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (6.31)$$

Las relaciones constitutivas de las barras son:

$$N_i = \frac{E\Omega_i}{l_i} \Delta_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Energía potencial total:

$$V = U - W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 N_i \Delta_i - Q_1 q_1 - Q_2 q_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{E\Omega_i}{l_i} \Delta_i^2 - Q_1 q_1 - Q_2 q_2$$

Equilibrio se produce para la posición q_i tal que:

$$\delta^1 V = 0$$

con lo que resultan las ecuaciones de equilibrio del nudo:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 = \Delta_1 \frac{E\Omega_1}{l_1} \cos \alpha + \Delta_2 \frac{E\Omega_2}{l_2} + \Delta_3 \frac{E\Omega_3}{l_3} \cos \alpha - Q_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 = \Delta_1 \frac{E\Omega_1}{l_1} \operatorname{sen} \alpha - \Delta_3 \frac{E\Omega_3}{l_3} \operatorname{sen} \alpha - Q_2 = 0$$

o bien, en términos de los movimientos:

$$(q_1 \cos \alpha + q_2 \operatorname{sen} \alpha) \cos^2 \alpha + q_1 + (q_1 \cos \alpha - q_2 \operatorname{sen} \alpha) \cos^2 \alpha = \frac{Q_1}{E\Omega} l$$

$$(q_1 \cos \alpha + q_2 \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + (q_1 \cos \alpha - q_2 \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{Q_2}{E\Omega} l$$

cuya solución es:

$$q_1 = \frac{Q_1 l}{E\Omega} \frac{1}{1 + 2\cos^3 \alpha}$$

$$q_2 = \frac{Q_2 l}{E\Omega} \frac{1}{2\sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

Los esfuerzos resultantes son por lo tanto:

$$N_1 = Q_1 \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2\cos^2 \alpha} + Q_2 \frac{1}{2\sin \alpha}$$

$$N_2 = Q_1 \frac{1}{1 + 2\cos^2 \alpha}$$

$$N_3 = Q_1 \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2\cos^2 \alpha} - Q_2 \frac{1}{2\sin \alpha}$$

El valor de la energía potencial total es:

$$V = -\frac{1}{2} \frac{1}{E\Omega} \left\{ \frac{Q_1^2}{1 + 2\cos^3 \alpha} + \frac{Q_2^2}{2\sin^2 \alpha \cos \alpha} \right\}$$

Se comprende que si se adopta una restricción "a priori" entre los dos movimientos, por ejemplo $q_2 = \lambda q_1$ con λ constante conocida, reduciendo el número de gdl (de 2 a 1 en este caso) se obtiene:

$$\Delta_1 = (\cos \alpha + \lambda \sin \alpha) q_1$$

$$\Delta_2 = q_1$$

$$\Delta_3 = (\cos \alpha - \lambda \sin \alpha) q_2$$

La energía potencial total es:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{E\Omega_i}{l_i} \Delta_i^2 - Q_1 q_1 - Q_2 \lambda q_1$$

y su variación nula conduce a la condición de equilibrio:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 = \Delta_1 \frac{E\Omega_1}{l_1} (\cos\alpha + \lambda \operatorname{sen}\alpha) + \Delta_2 \frac{E\Omega_2}{l_2} + \Delta_3 \frac{E\Omega_3}{l_3} (\cos\alpha - \lambda \operatorname{sen}\alpha) - (q_1 + \lambda Q_2) = 0$$

En términos del movimiento q_1 , se deduce la ecuación:

$$\{(\cos\alpha + \lambda \operatorname{sen}\alpha)^2 \cos\alpha + (\cos\alpha - \lambda \operatorname{sen}\alpha)^2 \cos\alpha + 1\} q_1 = (Q_1 + \lambda Q_2) \frac{1}{E\Omega}$$

cuya solución es:

$$\{(1 + 2\cos^3\alpha) + \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha\} q_1 = (Q_1 + \lambda Q_2) \frac{1}{E\Omega}$$

Los esfuerzos resultantes, son por lo tanto:

$$N_1 = \frac{(\cos\alpha + \lambda \operatorname{sen}\alpha) \cos\alpha}{(1 + 2\cos^3\alpha) + \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha} (Q_1 + \lambda Q_2)$$

$$N_2 = \frac{1}{(1 + 2\cos^3\alpha) + \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha} (Q_1 + \lambda Q_2)$$

$$N_3 = \frac{(\cos\alpha - \lambda \operatorname{sen}\alpha) \cos\alpha}{(1 + 2\cos^3\alpha) + \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha} (Q_1 + \lambda Q_2)$$

Se comprueba que estos esfuerzos están en equilibrio según la dirección definida por $q_2 = \lambda q_1$. En efecto, se satisface la ecuación:

$$(N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3) \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}^2} + (N_1 \operatorname{sen} \alpha - N_2 \operatorname{sen} \alpha) \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda}^2} = 0$$

La energía potencial total es, en este caso:

$$V^* = - \frac{1}{2E\Omega} (Q_1 + \lambda Q_2)^2 \frac{1}{(1 + 2\cos^2 \alpha) + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha}$$

Se observa que ocurre $V^* \geq V$.

Ejemplo 6.3.

Utilizando el teorema de la energía potencial total estacionaria, indicar un cálculo aproximado de la estructura de la figura 6.7.

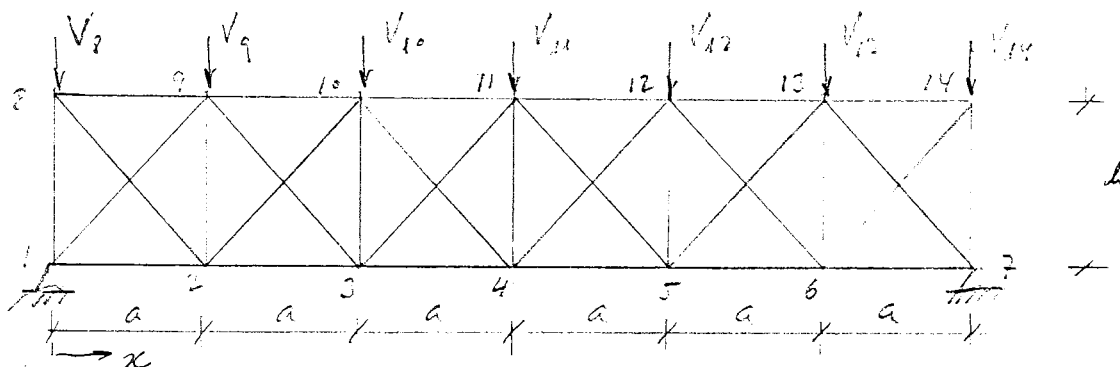


FIGURA 6.7.- Ejemplo 6.3.

Se suponen que los movimientos de los nudos siguen leyes prefijadas a priori. Por ejemplo:

Desplazamientos horizontales, cordón inferior:

$$u_1 = 0 \quad (6.32)$$

Desplazamientos horizontales cordón superior:

$$u_s = \left(1 - \frac{x}{3a}\right) q_1 \quad (6.32)$$

Desplazamientos verticales cordón inferior:

$$v_i = \frac{x(ba-x)}{6a^2} q_2 \quad (6.32)$$

Desplazamientos verticales cordón superior:

$$v_s = \frac{x(6a-x)}{9a^2} q_3 \quad (6.32)$$

De esta forma se pueden deducir las deformaciones de una barra genérica i , que une los nudos m y n , de coordenadas (x_m, y_m) y (x_n, y_n) . En efecto, la longitud de la barra es:

$$l_i = \{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

y el alargamiento:

$$\Delta_i = \frac{x_m - x_n}{l_i} (u_m - u_n) + \frac{y_m - y_n}{l_i} (v_m - v_n) \quad (6.33)$$

en donde (u_m, v_m) y (u_n, v_n) son los movimientos de los nudos m y n de la barra deducidas de las leyes (6.32).

La energía potencial total de la estructura es:

$$V = U - W = \sum_{i=1}^B \frac{E\Omega_i}{l_i} \Delta_i^2 - \sum_{n=1}^M V_n \cdot v_n$$

con B el número de barras y M el de nudos cargados (en este caso correspondientes al cordón superior) con fuerzas verticales V_n y los movimientos considerados son v_n .

Se comprueba que la energía potencial total V es función de los parámetros q_1 , q_2 y q_3 . La posición de equilibrio se alcanza con:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Sistema (lineal) de ecuaciones que permite determinar las tres incógnitas q_i y por lo tanto, los movimientos (u_m, v_m) de todos los nudos mediante (6.32). Los esfuerzos en las barras son directamente:

$$N_i = \frac{E\Omega_i}{l_i} \Delta_i$$

con Δ_i calculadas según la expresión (6.33).

Como en el ejemplo anterior, este método aproximado permite calcular la estructura con un número pequeño de parámetros incógnitas. El equilibrio de los esfuerzos N_i con las fuerzas exteriores V_m se satisface globalmente (según determinadas "direcciones"). La solución exacta por este método exigiría la consideración de $2 \times 12 = 24$ parámetros (movimientos u_m, v_m de los nudos).

Ejemplo 6.4.

Calcular mediante aplicación del teorema de la energía de deformación mínima la estructura de la figura 6.8, suponiendo que $\Omega_3 = 2\Omega_1 = 2\Omega_2$ y que sólo actúa un movimiento de valor q en la dirección del gdl 1 (asiento del apoyo). El módulo de elasticidad es constante e igual a E para todas las barras.

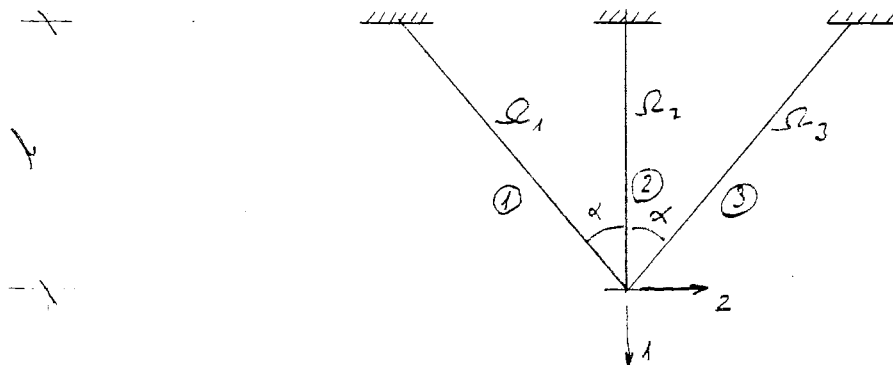


FIGURA 6.8.- Ejemplo 6.4.

Sean q_1 y q_2 los movimientos según los gdl 1 y 2 respectivamente. Las deformaciones de las barras compatibles con estos movimientos son:

$$\Delta_1 = q_1 \cos\alpha + q_2 \operatorname{sen}\alpha$$

$$\Delta_2 = q_1$$

$$\Delta_3 = q_1 \cos\alpha - q_2 \operatorname{sen}\alpha$$

El valor de $q_1 = q$ es conocido (dato del problema). El conjunto de deformaciones Δ_i compatibles con q depende del parámetro q_2 . El valor de q_2 que define las deformaciones Δ_i , cuyos esfuerzos correspondientes N_i ($N_i = E\Omega_i/l_i \cdot \Delta_i$) están en equilibrio, se obtiene de la condición de mínimo de U . Por consiguiente:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Delta_i^2 \frac{E\Omega_i}{l_i}$$

es decir:

$$U = \frac{E\Omega}{2l} \cos\alpha (q_1 \cos\alpha + q_2 \operatorname{sen}\alpha)^2 + \frac{E\Omega}{2l} q_1^2 + \frac{2E\Omega}{2l} \cos\alpha (q_1 \cos\alpha - q_2 \operatorname{sen}\alpha)^2$$

El valor de q_2 , que minimiza U se deduce de la ecuación de mínimo:

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

Esta condición expresa el equilibrio según el gdl 2 y su resolución conduce al valor de q_2 siguiente:

$$q_2 = \frac{\cos\alpha}{3\operatorname{sen}\alpha} q_1$$

Las deformaciones resultantes Δ_i se deducen por sustituciones de q_2 en las expresiones correspondientes:

$$\Delta_1 = \frac{4}{3} q_1 \cos \alpha \quad ; \quad \Delta_2 = q_1 \quad ; \quad \Delta_3 = \frac{2}{3} q_1 \cos \alpha$$

Se comprueba que según el gdl 2 se satisface el equilibrio:

$$N_1 \operatorname{sen} \alpha - N_2 \operatorname{sen} \alpha = 0$$

puesto que

$$\frac{E\Omega}{1} \Delta_1 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \frac{2E\Omega}{1} \Delta_3 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 0$$

El valor de la fuerza (reacción) Q se obtiene por consideración del equilibrio según el gdl 1.

$$Q = \frac{E\Omega}{1} \Delta_1 \cos^2 \alpha + \frac{E\Omega}{1} \Delta_2 + 2 \frac{E\Omega}{1} \Delta_3 \cos^2 \alpha$$

es decir

$$Q = \frac{3+8 \cos^3 \alpha}{3} \frac{E\Omega}{1} q$$

Los esfuerzos en las barras son inmediatos a partir de $N_i = \frac{E\Omega_i}{1_i} \Delta_i$ resultando:

$$N_1 = N_3 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{3+8 \cos^3 \alpha} Q \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{3}{3+8 \cos^3 \alpha} Q$$

6.5.- Estabilidad del equilibrio. Energía potencial total mínima

Sea una estructura sometida a las fuerzas Q_i que producen los movimientos q_i , en la configuración de equilibrio y compatible. Es a veces interesante conocer, la clase de estabilidad existente en esa posición de equilibrio. Con este objeto, se consideran dos estados de movimientos compatibles:

- a) Estado 1 con los movimientos q_i y con la correspondiente energía potencial total $V(q_i)$.
- b) Estado 2 o perturbado del anterior, es decir, con los movimientos $q_i + \delta q_i$, que modifican la energía potencial total al valor $V(q_i + \delta q_i)$. Se suponen que δq_i corresponden a movimientos compatibles.

El incremento de la energía potencial total al pasar la estructura de la posición de equilibrio (estado 1) a la perturbada (estado 2) es:

$$\begin{aligned} \Delta V = V(q_i + \delta q_i) - V(q_i) &= \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + 0(\delta^3 V) = \sum_{i=1}^M \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j + 0(\delta^3 V) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Como en el estado 1, la estructura esta en equilibrio se cumple $\delta^1 V = 0$, por lo que el signo del incremento de la energía potencial total viene dado por el signo de $\delta^2 V$, es decir:

$$\delta^2 V = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j = \delta \underline{q}^T \cdot \underline{H} \delta \underline{q} \quad (6.36)$$

supuesto que $\delta^2 V \neq 0$.

La matriz $\underline{H} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)$ se denomina hessiana.

Evidentemente si $\delta^2 V$ es siempre positivo para cualquier perturbación δq_i , el equilibrio es estable y si es siempre negativo inestable. En los casos, en los que existen vectores δq para los que $\delta^2 V > 0$ y otras δq que condición a $\delta^2 V < 0$ existe una situación dudosa (inestabilidad incipiente) que debe de resolverse recurriendo a $\delta^3 V$. Así pues, en virtud de la ecuación (6.36) se puede establecer:

- a) Si \underline{H} es una matriz positiva definida, el equilibrio es estable.
- b) Si \underline{H} es una matriz negativa definida, el equilibrio es inestable.
- c) Si \underline{H} es positiva semidefinida existe una inestabilidad incipiente.

Como se comprueba en el estudio de la estabilidad de estructura, la matriz $\underline{H} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)$ representa una matriz de rigidez total que incluye la matriz elástica $\partial^2 U / \partial q_i \partial q_j$ y la matriz de estabilidad $\partial^2 W / \partial q_i \partial q_j$ función de las fuerzas iniciales y de la geometría de la estructura deformada. En el caso de cálculo lineal, se comprueba que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = k_{ij}$$

con k_{ij} matriz de rigidez local en el estado I de equilibrio (se suponen los gdl independientes).

6.6.- Expresión de las variaciones del trabajo y de la energía de deformación complementarios

En lo que sigue, se procederá análogamente a los apartados anteriores, pero refiriéndose a los valores complementarios del trabajo y de la energía de deformación. Se deduce así un conjunto de teoremas duales a

los establecidos, es decir, que pueden ser enunciados simplemente mediante la sustitución de los términos fuerzas por movimiento y esfuerzo (tensión) por deformación y viceversa, así como permutación de las ecuaciones de equilibrio por compatibilidad.

Se deduce por lo tanto para la variación del trabajo complementario exterior, ΔW^* entre dos estados definidos por las fuerzas Q_i y $Q_i + \delta Q_i$:

$$\Delta W^* = \delta^1 W^* + \frac{1}{2} \delta^2 W^* + O(\delta^3 W^*) \quad (6.37)$$

siendo

$$\delta^1 W^* = \sum_{i=1}^M q_i \delta Q_i = \delta \underline{Q}^T \underline{q} \quad (6.38)$$

$$\delta^2 W^* = \sum_{i=1}^M \delta q_i \delta Q_i = \delta \underline{Q}^T \delta \underline{q}$$

y las análogas correspondientes a la variación ΔU^* de la energía de deformación complementaria:

$$\Delta U^* = \delta^1 U^* + \frac{1}{2} \delta^2 U^* + O(\delta^3 U^*) \quad (6.39)$$

con

$$\delta^1 U^* = \sum_{j=1}^B \underline{\Delta}_j \delta N_j = \delta \underline{N}^T \cdot \underline{\Delta} \quad (6.40)$$

$$\delta^2 U^* = \sum_{j=1}^B \delta \underline{\Delta}_j \delta N_j = \delta \underline{N}^T \cdot \delta \underline{\Delta}$$

6.7.- Principio de los trabajos virtuales complementarios

6.7.1.- Enunciado

Como en el apartado 6.4, se introduce el concepto de fuerzas virtuales como un conjunto de esfuerzos que están en autoequilibrio (no

modifican el equilibrio de las fuerzas exteriores) y para los cuales no se producen variaciones de los movimientos en la estructura ($\delta q = 0$). Constituyen fuerzas ideales ya que no son físicamente posibles (*) dado el carácter monotónico de las curvas $q-Q$. Así pues, si se consideran fuerzas virtuales, la variación del trabajo implementario ΔW^* se reduce a su primera variación, es decir:

$$\Delta W^* = \delta^1 W^*$$

y se denomina trabajo virtual complementario.

Los esfuerzos δN que se producen en la estructura en equilibrio con las fuerzas virtuales δQ se denominan esfuerzos virtuales y por definición no modifican las deformaciones existentes en las barras, o sea $\delta \Delta = 0$. Por lo tanto, la energía de deformación complementaria virtual que generan, es simplemente:

$$\Delta U^* = \delta^1 U^*$$

El principio de los trabajos complementarios virtuales se establece mediante la igualdad:

$$\delta^1 W^* = \delta^1 U^*$$

o alternativamente se puede enunciar:

La condición necesaria y suficiente para que una estructura con unos movimientos q y unas deformaciones Δ sea compatible, es que para un conjunto arbitrario de fuerzas virtuales δQ con sus correspondientes esfuerzos en equilibrio δN el trabajo complementario virtual y la energía de deformación complementarias sean iguales. Por lo tanto, se cumple:

(*) Dentro de una primera aproximación se pueden considerar las fuerzas y esfuerzos virtuales suficientemente pequeños por lo que es razonable despreciar contribuciones de orden superior en las variaciones del trabajo y energía complementarias, es decir, en ΔW^* y ΔU^* .

$$\begin{array}{c}
 \delta \underline{Q}^T \underline{q} = \delta \underline{N}^T \underline{\Delta} \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 \text{en equilibrio} \quad \text{arbitrario}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nwarrow \text{compatible} \\
 \searrow
 \end{array}
 \quad (6.41)$$

6.7.2.- Teorema de la fuerza unidad

Se adopta como fuerzas virtuales, los siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 \delta Q_i = \delta Q & \text{en el gdl particular } i \\
 \delta Q_j = 0 & \text{para } j \neq i
 \end{array}
 \quad (6.42)$$

que producen unas reacciones que las equilibran y unos esfuerzos δN .

Si la estructura es estáticamente lineal, los esfuerzos son proporcionales a las fuerzas, con lo que resulta:

$$\delta N = \delta Q \cdot \underline{N}^1$$

siendo \underline{N}^1 el conjunto de esfuerzos que equilibran una fuerza unidad en el gdl i y en los restantes gdl no existen fuerzas.

La ecuación (6.41) conduce a la siguiente:

$$\delta Q \cdot q_i = \delta \underline{N}^T \cdot \underline{\Delta}$$

o bien por linealidad

$$\begin{array}{c}
 1 \cdot q_i = \underline{N}^{1T} \underline{\Delta} = \sum_{i=1}^B N_i^1 \Delta_i \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 \text{equilibrio}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nwarrow \text{compatible} \\
 \searrow
 \end{array}
 \quad (6.43)$$

Esta fórmula ha sido aplicada en el capítulo anterior en la determinación de movimientos y se obtuvo entonces como consecuencia del teorema (segundo) de Castigliano.

Ejemplo 6.5.

Plantear el teorema de la fuerza unidad en el gdl (movimiento vertical) del nudo 6 de la figura 6.9.

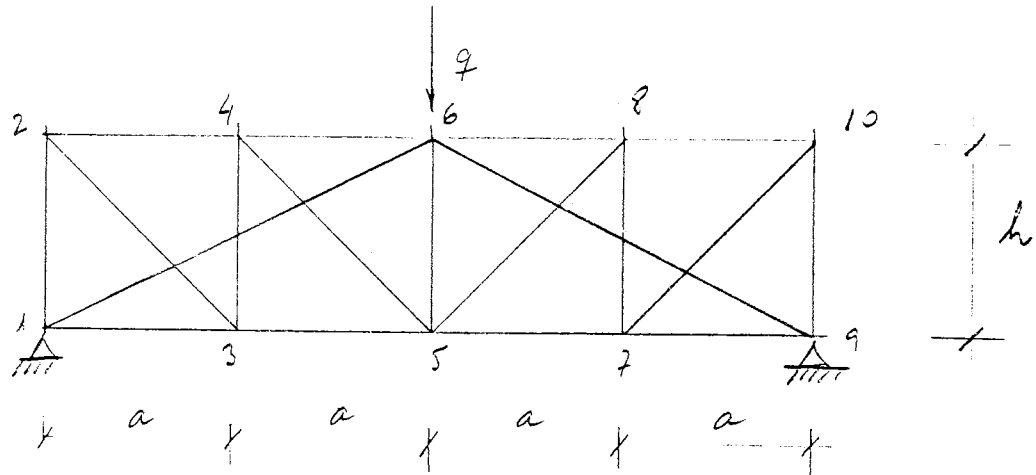


FIGURA 6.9.- Ejemplo 6.5.

Se introduce una fuerza unidad $Q=1$ y unos esfuerzos en equilibrio son:

$$N_{16} = N_{69} = \frac{\sqrt{4a^2 + h^2}}{h}$$

y en las restantes barras esfuerzos nulos.

La ecuación de compatibilidad (movimiento vertical del nudo 6) es según la expresión 6.43:

$$q = \frac{\sqrt{4a^2 + h^2}}{h} \Delta_{16} + \frac{\sqrt{4a^2 + h^2}}{h} \Delta_{69}$$

6.7.3.- Teorema de la energía potencial total complementaria estacionaria

Si se suponen que los movimientos \underline{q} producen un trabajo complementario procedente de un campo potencial U_e^* , puesto que la estructura es conservativa, se puede escribir para la variación de este trabajo:

$$\delta^1 W^* = \underline{q}^T \delta \underline{Q} = \sum_{i=1}^M q_i \delta Q_i = -\delta U_e^* \quad (6.44)$$

El principio de los trabajos complementarios virtuales se reduce a la siguiente expresión:

$$\delta^1 W^* = \delta^1 U^* = -\delta U_e^*$$

o bien:

$$\delta^1 (U^* + U_e^*) = \delta^1 V^* = 0 \quad (6.45)$$

con $V^* = U^* + U_e^*$ la energía potencial total complementaria.

La expresión (6.45) es equivalente a la siguiente:

$$\delta^1 V^* = \sum_{i=1}^M \frac{\partial V}{\partial Q_i} \delta Q_i = \delta \underline{Q}^T \cdot \underline{\nabla V}$$

Como las fuerzas virtuales δQ_i son arbitrarias se deduce:

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i} = 0 \quad \text{o bien:} \quad \underline{\nabla V} = \underline{\nabla} V = 0$$

ecuaciones que representan las condiciones de compatibilidad en cada gdl i .

6.7.4.- Segundo teorema de Castigliano

El principio de los trabajos complementarios virtuales establece:

$$\delta^1 U^* = \delta^1 W^* = \sum_{i=1}^M q_i \delta Q_i = \delta \underline{Q}^T \underline{q} \quad (6.46)$$

La energía complementaria de deformación es función de las fuerzas Q_i ya que los movimientos q_i se suponen permanecen constantes y compatibles con las deformaciones Δ_i . Entonces, se puede escribir:

$$\Delta U^* = \sum_{i=1}^M \frac{\partial V}{\partial Q_i} \delta Q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j} \delta Q_i \delta Q_j + O(\delta^3)$$

o bien en forma matricial:

$$\Delta U^* = \delta \underline{Q}^T \cdot \underline{\nabla} U + \frac{1}{2} \delta \underline{Q}^T \underline{H}^* \delta \underline{Q} + O(\delta^3) \quad (6.47)$$

De la comparación de las expresiones (6.47) y (6.39) se deduce:

$$\begin{aligned} \delta^1 U^* &= \delta \underline{Q}^T \underline{\nabla} U^* = \delta^1 W^* = \delta \underline{Q}^T \underline{q} \\ \delta^2 U^* &= \delta \underline{Q}^T \underline{H}^* \delta \underline{Q} = \delta^2 W^* = \delta \underline{Q}^T \cdot \delta \underline{q} \end{aligned} \quad (6.48)$$

(*) La segunda igualdad de (6.48) revela el carácter de matriz de flexibilidad tangente o incremental del hessiano \underline{H}^* , ya que $\delta \underline{q} = \underline{H}^* \delta \underline{Q}$.

La primera igualdad vectorial, se satisface para cualquier conjunto arbitrario de fuerzas virtuales δQ , luego:

$$q = \nabla U^*$$

o bien:

$$q_i = \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} \quad (6.49)$$

que representa el segundo teorema de Castigliano, es decir, la expresión de un movimiento como la derivada de la energía de deformación complementaria con relación a una fuerza eficaz con dicho movimiento.

6.7.5. Teorema de la energía de deformación complementaria mínima

Se considera una estructura con unas deformaciones Δ_i compatibles con los movimientos que ocasiona q_i . Se mostrará a continuación que entre todas las configuraciones posibles de fuerzas Q_i en equilibrio con los esfuerzos N_i , la que hace mínima la energía de deformación complementaria corresponde a la situación compatible con la anterior.

Se considera, para ello, un número M' arbitrarios de gdl adicionales e independientes de los M de la estructura y para los cuales los movimientos correspondientes son $q'_i = 0$ y las fuerzas actuantes Q'_i son las reacciones en la estructura bajo los movimientos q_i compatibles con las deformaciones Δ_i , que produce los esfuerzos N_i y exigen la existencia de unas fuerzas equivalentes Q_i . Se adoptan las siguientes fuerzas virtuales:

$$\delta Q_i = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, M \text{ gdl}$$

de la estructura, en las que existen los movimientos q_i , en general $q_i \neq 0$.

$$\delta Q_i' \neq 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, M' \quad \text{gd1}$$

adicionales en los que los movimientos son nulos $q_i' = 0$

El trabajo virtual complementario es nulo, ya que se cumple:

$$\delta^1 W^* = \sum_{i=1}^M q_i \delta Q_i + \sum_{i=1}^{M'} q_i' \delta Q_i' = 0 \quad (6.50)$$

y por consiguiente:

$$\delta^1 U^* = \delta^1 W^* = 0 \quad (6.51)$$

o bien, según el segundo teorema de Castigliano:

$$q_i' = \frac{\partial U^*}{\partial Q_i'} = 0 \quad (6.52)$$

Cada una de las dos ecuaciones anteriores (6.51) y (6.52) expresan el carácter estacionario de la energía de deformación complementaria con relación a fuerzas virtuales (y esfuerzos compatibles).

Por otra parte, si se observa el signo de $\delta^2 W^*$, se deduce que en las estructuras estables es positivo, ya que para los incrementos de fuerzas δQ_i y $\delta Q_i'$ es:

$$\Delta W^* = \delta^1 W^* + \frac{1}{2} \delta^2 W^* + O(\delta^3 W^*) = \frac{1}{2} \delta^2 W^* + O(\delta^3)$$

y por otra parte:

$$\delta^2 W^* = \sum_{i=1}^M \delta q_i \cdot \delta Q_i + \sum_{i=1}^{M_1} \delta Q_i' \cdot \delta q_i' = \sum_{i=1}^{M_1} \delta Q_i' \cdot \delta q_i' = \delta \underline{Q}'^T \cdot \delta \underline{q}'$$

y como la relación $\delta Q_i'$ y $\delta q_i'$ es monotónica creciente, el producto $\delta Q_i' \cdot \delta q_i'$ es siempre positivo.

Este trabajo ΔW^* es igual a ΔU^* y por lo tanto, se deduce que $\delta^2 U^* > 0$, lo que implica que U^* es un mínimo. En efecto, cualquier variación de las fuerzas $\delta Q_i'$ respecto a los existentes Q_i (q_i no varían) suponen un cambio de energías de deformación complementaria a un valor mayor $U^* + 1/2 \cdot \delta U^*$.

El teorema se enuncia como sigue:

Distribuciones de esfuerzos N en equilibrio con las fuerzas Q para las cuales las correspondientes deformaciones Δ son compatibles con los movimientos q representan distribuciones de energía complementaria de deformación mínima U^* .

Las siguientes consecuencias de este teorema pueden deducirse:

En primer lugar las fuerzas $\delta Q_i'$ en autoequilibrio introducidos en la estructura en gdl para las que $q_i' = 0$, consideradas en la demostración del teorema del mínimo de U^* , eran tales que no modificaban los valores de las fuerzas Q_i .

Sea la estructura en la configuración compatible de los movimientos q_i producidos por un conjunto de fuerzas Q_i en equilibrio y para los que en otros gdl sin movimiento $q_i' = 0$ existen grupos de fuerzas tales que $\delta Q_i' \neq 0$, es decir, no se introduce ninguna restricción a su variación (son linealmente independientes). Este estado de la estructura se denomina 1.

El estado 2, es tal, que las fuerzas actuantes son los Q_i y las restantes varían de modo que $\delta Q_i' = 0$ (*), es decir, existen restricciones a las variaciones de las fuerzas Q_i' .

(*) En realidad, constituyen fuerzas generalizadas (conjuntos de fuerzas) y $\delta Q_i' = 0$ representa que las variaciones producidas en las fuerzas constitutivas de Q_i' son tales que su resultante es nula (autoequilibrio).

De la comparación de los estados 1 y 2 se obtiene al considerar la energía de deformación mínima:

$$U^{*1} < U^{*2}$$

es decir, recordando la expresión de la U^{*i} :

$$U^{*1} = \int_0^N \underline{\Delta}^T \cdot \delta \underline{N} = \int_0^Q \underline{q}^T \delta Q + \int_0^{\bar{Q}'} \underline{q}'^T \delta Q' = \int_0^{\bar{Q}} \underline{q}^T \delta Q$$

$$U^{*2} = \int_0^N (\Delta + \delta \Delta) \delta N = \int_0^{\bar{Q}} (\underline{q} + \delta \underline{q})^T \delta Q$$

La variación primera de U^{*2} se obtiene al introducir un conjunto de fuerzas virtuales δQ (pero ahora con la restricción $\delta Q' = 0$) en equilibrio con los esfuerzos δN . Los movimientos δq se producen en los gdl y son compatibles con las coacciones en $\delta q' = 0$. Por lo tanto, se deduce:

$$\int_0^{\bar{Q}} \underline{q}^T \delta Q < \int_0^{\bar{Q}} (\underline{q} + \delta \underline{q})^T \delta Q$$

que implica:

$$\delta q_i > 0 \quad \text{para todo } i$$

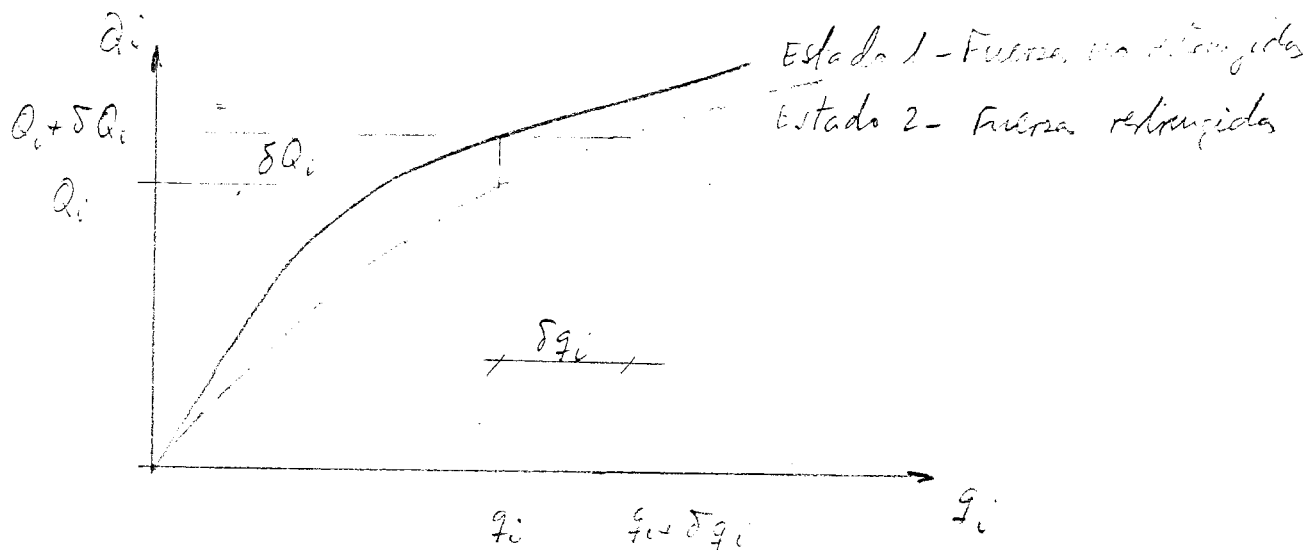


FIGURA 6.10.- Relación fuerza-movimiento en el caso de gdl con fuerzas restringidas y libres.

Si se representa la curva relación fuerza-movimiento para un gdl figura 6.10, se observa que para el estado 2 la estructura es más rígida. Por lo tanto, se deduce en la misma las siguientes conclusiones:

- (1) Para las mismas fuerzas, la energía de deformación complementaria U^* se incrementa cuando se introducen condiciones a las distribuciones de esfuerzos (o fuerzas). Por el contrario, esta disminuye si se eliminan las condiciones.
- (2) Para movimientos dados q_i , U^* disminuye cuando se introducen condiciones en la distribución de esfuerzos. Inversamente U^* aumenta cuando dichas condiciones desaparecen.
- (3) Para movimientos dados q_i , U^* es máxima si no se introduce ninguna restricción a las deformaciones de esfuerzos o (reacciones).

Ejemplo 6.6.

Resolver la estructura del ejemplo 6.4 mediante la aplicación del teorema de la energía complementaria mínima y suponiendo que actúa una carga Q en la dirección del gdl 1 y este por consiguiente no se encuentra coaccionado.

Esfuerzos en equilibrio con Q :

$$N_1 = - \frac{1}{2\cos\alpha} x$$

$$N_2 = Q + x$$

$$N_3 = - \frac{1}{2\cos\alpha} x$$

El valor de x se deduce mediante la condición de mínimo de la energía U^* , siendo:

$$U^* = \sum_{i=1}^3 N_i^2 \frac{1}{2E\Omega_i} = \left(\frac{1}{4\cos^2\alpha}\right) \frac{1}{2\cos\alpha E\Omega} + (Q+x)^2 \frac{1}{2E\Omega} + \left(\frac{1}{4\cos^2\alpha} x^2\right) \frac{1}{4\cos\alpha E\Omega}$$

Esta condición es:

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = 0$$

es decir:

$$x = - \frac{8 \cos^3 \alpha}{3 + 8 \cos^3 \alpha}$$

Los esfuerzos resultantes son:

$$N_1 = N_3 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{3 + 8 \cos^3 \alpha} Q ; \quad N_2 = \frac{3}{3 + 8 \cos^3 \alpha} Q$$

Se comprueba que se cumple la ecuación de compatibilidad:

$$\Delta_1 + \Delta_3 - 2\Delta_2 \cos \alpha = 0$$

puesto que las deformaciones de las barras son:

$$\Delta_1 = \frac{4 \cos \alpha}{3 + 8 \cos^3 \alpha} \frac{Ql}{E\Omega} ; \quad \Delta_2 = \frac{3}{3 + 8 \cos^3 \alpha} \frac{Ql}{E\Omega} ; \quad \Delta_3 = \frac{2 \cos \alpha}{3 + 8 \cos^3 \alpha} \frac{Ql}{E\Omega}$$

Los movimientos q_1 y q_2 se deducen de las condiciones de compatibilidad:

$$\Delta_1 = q_1 \cos \alpha + q_2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\Delta_2 = q_1$$

$$\Delta_3 = q_1 \cos \alpha - q_2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$q_1 = \Delta_2$$

$$q_2 = (\Delta_1 - \Delta_3) / 2 \operatorname{sen} \alpha$$

resultando:

$$q_1 = \frac{3}{3+8\cos^3\alpha} \frac{Q_1}{E\Omega} ; \quad q_2 = \frac{\cos\alpha}{3+8\cos^3\alpha} \frac{Q_1}{E\Omega}$$

Conviene que se comparen y observen las analogías existentes entre los métodos aplicados en este ejemplo y en el 6.4.

Ejemplo 6.7.

Obtener los esfuerzos en todas las barras de la estructura de la figura 6.11 utilizando el teorema de mínimo de la energía complementaria de deformación. Todas las barras son iguales y tales que $\frac{1}{E\Omega} = 10^{-4}$ m/t.

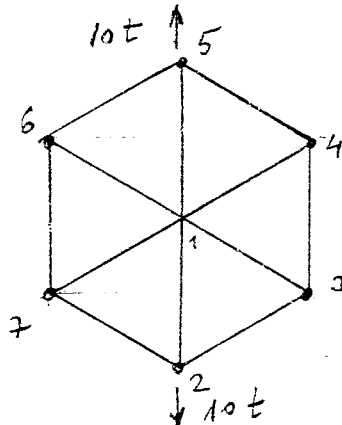


FIGURA 6.11.- Ejemplo 6.7.

Los esfuerzos en las barras que están en equilibrio con las fuerzas exteriores son:

$$N_{12} = N_{15} = 10 + N$$

$$N_{13} = N_{14} = N_{16} = N_{17} = N$$

$$N_{23} = N_{34} = N_{45} = N_{56} = N_{67} = N_{72} = -N$$

La energía complementaria de deformación es:

$$U^* = 2 \frac{1}{2} (10+N)^2 \frac{1}{E\Omega} + 4 \frac{1}{2} N^2 \frac{1}{E\Omega} + 6 \frac{1}{2} N^2 \frac{1}{E\Omega}$$

El valor de N se obtiene mediante la condición de mínimo de U^* , es decir, los esfuerzos correspondientes producen deformaciones compatibles. Por lo tanto:

$$\frac{dU^*}{dN} = 0 = 2(10+N)\frac{1}{E\Omega} + 4N\frac{1}{E\Omega} + 6N\frac{1}{E\Omega} = 0 \quad ; \quad N = -\frac{20}{12} = -\frac{5}{3}$$

y los esfuerzos en las barras son entonces:

$$N_{12} = N_{15} = \frac{25}{3} \text{ toneladas}$$

$$N_{13} = N_{14} = N_{16} = N_{17} = -\frac{5}{3} \text{ toneladas}$$

$$N_{23} = N_{34} = N_{45} = N_{56} = N_{67} = N_{72} = \frac{5}{3} \text{ toneladas}$$

6.8.- Energía potencial total complementaria mínima

Siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado en el apartado 6.5, se supone la estructura sometida a dos estados 1 y 2 definidos como sigue:

Estado 1 con las fuerzas Q_i y energía total complementaria $V^*(Q_i)$.

Estado 2 con las fuerzas $Q_i + \delta Q_i$ y la correspondiente energía total complementaria $V^*(Q_i + \delta Q_i)$. Las fuerzas virtuales se han designado por δQ_i .

El incremento de la energía total de deformación es:

$$V^* = V^*(Q_i + \delta Q_i) - V^*(Q_i) = \delta^1 V^* + \frac{1}{2} \delta^2 V^* + 0(\delta^3) \quad (6.53)$$

Como en el estado 1 la estructura esta en equilibrio se cumple:

$$\delta^1 V^* = 0$$

Por otra parte, $\delta^1 V^* = \delta^1 (U + U_e) = 0$ y $\delta^1 U_e$ es una función lineal de δQ_i ya que las q_i son constantes, al ser las fuerzas perturbadoras virtuales. Por lo tanto, se deduce:

$$\delta^2 V^* = \delta^2 (U + U_e) = \delta^2 U \quad (6.54)$$

y de la ecuación (6.53):

$$\Delta V^* = \frac{1}{2} \delta^2 V^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 V^*}{\partial Q_i \partial Q_j} \delta Q_i \delta Q_j = \delta Q^T \underline{H}^* \delta Q$$

o bien

$$\Delta V^* = \frac{1}{2} \delta^2 V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 U^*}{\partial Q_i \partial Q_j} \delta Q_i \delta Q_j = \delta Q^T \underline{H}^* \delta Q \quad (*)$$

Por lo tanto, la funcional $V^*(Q_i)$ se comporta en el estado de equilibrio como sigue para δQ_i arbitrarias:

Para $\delta^2 V^* > 0$ V^* es un mínimo y \underline{H}^* es positiva definida.

Para $\delta^2 V^* < 0$ V^* es un máximo y \underline{H}^* es negativa definida.

Para $\delta^2 V^* \geq 0$ V^* es estacionario y \underline{H}^* es positiva semidefinida.

Entonces si U^* es estacionario para δQ_i arbitrarios y \underline{H}^* es positiva definida, se deduce U^* mínimo y el estado 1 corresponde a una configuración compatible. Si \underline{H}^* es negativa definida U^* es máximo. Para \underline{H}^* semidefinida positiva existen direcciones de δQ_i para las cuales $\delta^2 U^* = 0$ y la energía de deformación complementario es simplemente estacionaria.

(*) Se comprende que \underline{H}^* es la matriz hessiana y representa una matriz de flexibilidad local puesto que:

$$q_j = \frac{\partial U^*}{\partial Q_j} \quad \text{y} \quad \underline{H}^* = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

6.9. Resumen

Los teoremas anteriores pueden resumirse en el siguiente cuadro resumen comparativo entre las dos situaciones duales.

<u>Trabajo virtual</u>	<u>Trabajo complementario virtual</u>
<u>-Variaciones</u>	<u>-Variaciones</u>
$\Delta W = \delta \underline{q}^T \underline{Q} + \frac{1}{2} \delta \underline{q}^T \delta \underline{Q} + O(\delta^3) = \delta^1 W + \frac{1}{2} \delta^2 W + O(\delta^3)$	$\delta W^* = \delta \underline{Q}^T \underline{q} + \frac{1}{2} \delta \underline{Q}^T \delta \underline{q} + O(\delta^3) = \delta^1 W + \frac{1}{2} \delta^2 W$
$\Delta U = \delta \underline{\Delta}^T \underline{N} + \frac{1}{2} \delta \underline{\Delta}^T \delta \underline{N} + O(\delta^3) = \delta^1 U + \frac{1}{2} \delta^2 U + O(\delta^3)$	$\Delta U^* = \delta \underline{N}^T \underline{\Delta} + \frac{1}{2} \delta \underline{N}^T \delta \underline{\Delta} + O(\delta^3) = \delta^1 U^* + \frac{1}{2} \delta^2 U^* + O(\delta^3)$
<u>-Movimientos y deformaciones virtuales</u>	<u>-Inversas y esfuerzos virtuales</u>
$\delta \underline{q}$ y $\delta \underline{\Delta}$ tales que $\delta \underline{Q} = 0$, $\delta \underline{N} = 0$	$\delta \underline{Q}$ y $\delta \underline{N}$ tales que $\delta \underline{q} = \delta \underline{\Delta} = 0$
<u>-Principio de los movimientos virtuales</u>	<u>-Principio de las fuerzas virtuales</u>
Principio del trabajo virtual:	Principio del trabajo virtual complementario:
$\delta^1 W = \delta^1 U$	$\delta^1 W^* = \delta^1 U^*$
<u>-Contragradiencia</u>	<u>-Contragradiencia</u>
Compatibilidad: $\delta \underline{\Delta} = \underline{b} \delta \underline{q}$	Equilibrio: $\delta \underline{N} = \underline{b}^* \delta \underline{Q}$
$\begin{array}{c} \text{equilibrio} \\ \downarrow \\ \delta \underline{q}^T \underline{Q} = \delta \underline{\Delta}^T \underline{N} = \delta \underline{q}^T \underline{b}^T \underline{N} \\ \uparrow \text{compatibilidad} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{compatibilidad} \\ \downarrow \\ \delta \underline{Q}^T \underline{q} = \delta \underline{N}^T \underline{\Delta} = \delta \underline{Q}^T \underline{b}^* \underline{\Delta} \\ \uparrow \text{equilibrio} \end{array}$
Equilibrio: $\underline{Q} = \underline{b}^T \underline{N}$	Compatibilidad: $\underline{q} = \underline{b}^* \underline{\Delta}$

-Teorema movimiento unidad

$$1 \cdot \underline{Q}_r = \underline{b}^T \cdot \underline{N}$$

↑ equilibrio
↑ compatibilidad

-Principio de la energía potencial total estacionaria

$$\delta^1 V = \delta^1 (U_e + U) = 0 ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

-Teorema primero de Castigliano

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_i} ; \quad N_j = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j}$$

-Principio de la energía de deformación estacionaria

$$\delta^1 U = 0$$

-Teorema de la energía de deformación mínima U.

Configuraciones compatibles de \underline{q} y $\underline{\Delta}$ para que las que los esfuerzos correspondientes están en equilibrio con las fuerzas son configuraciones de mínimo de U.

-Estabilidad del equilibrio

$$\delta^2 V > 0 \quad \text{estable}$$

$$\delta^2 V < 0 \quad \text{inestable}$$

$$\delta^2 V = 0 \quad \text{inestabilidad incipiente}$$

-Teorema de la fuerza unidad

$$1 \cdot \underline{q}_r = \underline{b}^{*T} \cdot \underline{\Delta}$$

↑ compatibilidad
↑ equilibrio

-Principio de la energía potencial total complementaria estacionaria

$$\delta^1 V^* = \delta^1 (U_e^* + U^*) = 0 ; \quad \frac{\partial V^*}{\partial Q_i} = 0$$

-Teorema segundo de Castigliano

$$q_i = \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} ; \quad \Delta_j = \frac{\partial U^*}{\partial N_j}$$

-Principio de la energía de deformación complementaria estacionaria

$$\delta^1 U^* = 0$$

-Teorema de la energía de deformación complementaria mínima U*.

Distribuciones de \underline{N} en equilibrio con \underline{Q} , para las cuales las deformaciones correspondientes $\underline{\Delta}$ son compatibles con \underline{q} son distribuciones de mínimo de U*.

-Función potencial total complementaria

$$\delta^2 V^* > 0 \quad V^* \text{ mínimo}$$

$$\delta^2 V^* < 0 \quad V^* \text{ máximo}$$

$$\delta^2 V^* = 0 \quad V^* \text{ estacionario}$$

-Implicaciones del teorema de mínimo de U

- (1) Introducción de coacciones a los movimientos (o deformaciones) incrementa la rigidez de la estructura.
- (2) Para unas fuerzas dadas Q_i , la energía de deformación es máxima cuando no se introducen ninguna coacción a los movimientos.
- (3) Para unos movimientos dados q_i , U se incrementa cuando se introducen coacciones a los movimientos.

-Implicaciones del teorema de mínimo de U^*

- (1) Introducción de restricciones a las fuerzas (o esfuerzos) incrementa la flexibilidad de la estructura.
- (2) Para unos movimientos dados q_i la energía de deformación complementaria es máxima cuando no existen restricciones en las fuerzas.
- (3) Para unas fuerzas dadas Q_i , U se incrementa cuando se introduce restricción en las fuerzas.

EJERCICIOS, ENUNCIADOS

- 6.1. Resolver el ejemplo 6.4 mediante la utilización del teorema del mínimo de la energía de deformación complementaria.
- 6.2. Resolver el ejemplo 6.6 mediante la utilización del teorema del mínimo de la energía de deformación.
- 6.3. Plantear el cálculo de la estructura de la figura utilizando: (a) el teorema del mínimo de U ; (b) el teorema de la energía U^* .

El apoyo 4 sufre un asiento vertical de valor q .

$\frac{1}{E\Omega}$ constante para todas las barras.

(Introducir deformaciones y preesfuerzos iniciales).

- 6.4. Determinar reacciones y esfuerzos en las barras aplicando el teorema del mínimo de la energía de deformación U^* .

$$E_h = 3 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}; \quad E_s = 2,1 \cdot 10^7 \text{ tm}^{-2}$$

No se considera la elongabilidad de las barras de hormigón. El área de las barras de acero se indica.

Discutir los valores que resultan en función de la rigidez a flexión I de la pieza de hormigón.

- 6.5. En la estructura de la figura, se pide:

- (1) Reacciones y leyes de esfuerzos en todas las barras.
- (2) Desplazamiento vertical del nudo 5.

- 6.6. Para el cálculo de la estructura hiperestática de la figura se han supuesto varios estados de carga. El estado (0) corresponde a los esfuerzos en una estructura isostática básica en equilibrio con

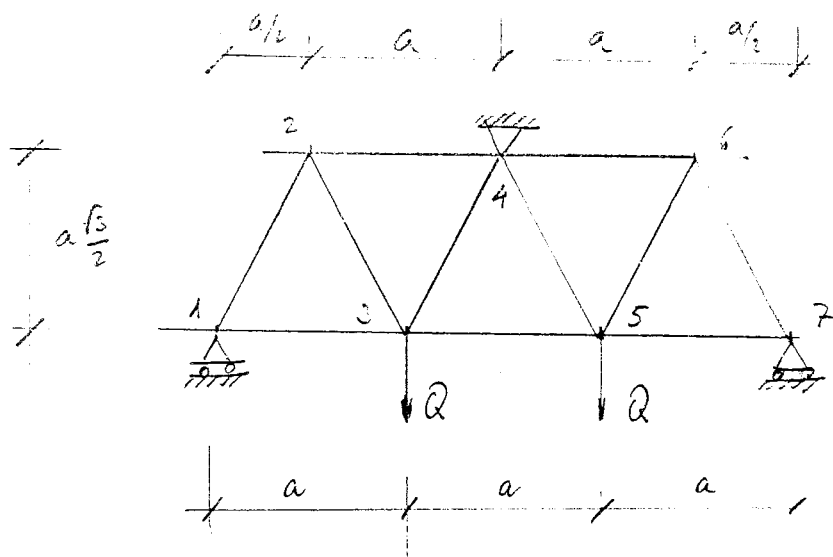


FIGURA 6.12.- Ejercicio 6.3.

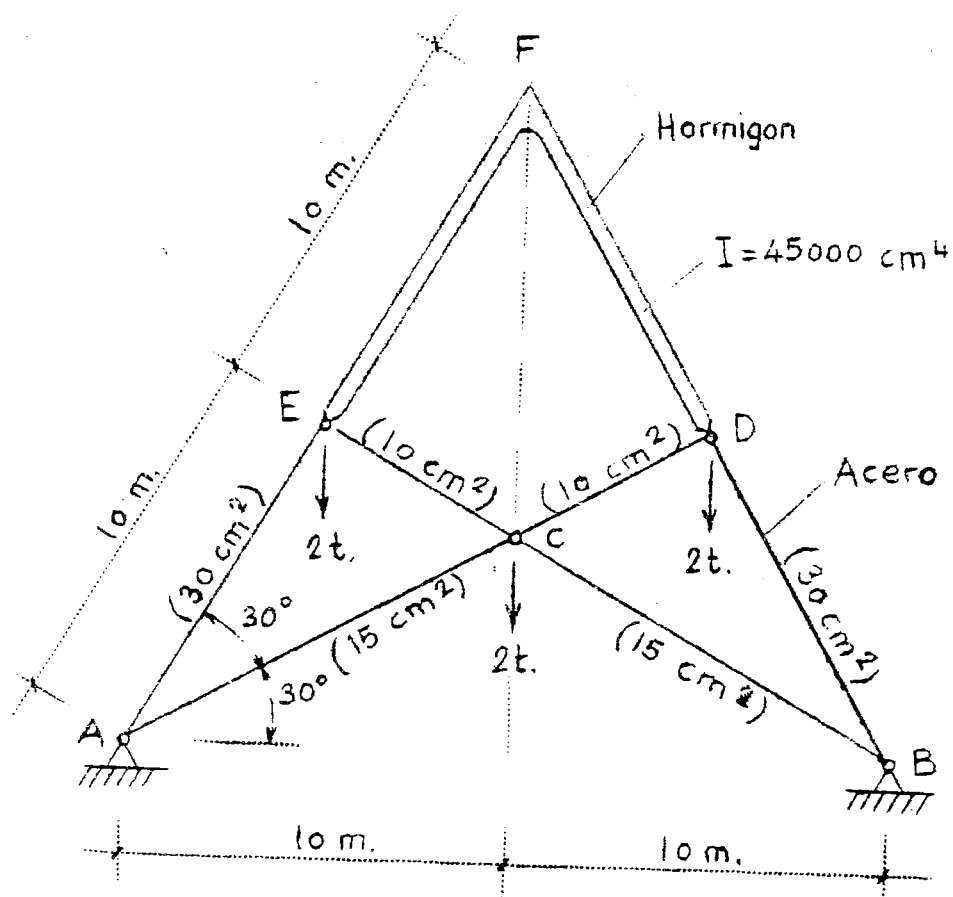


FIGURA 6.13.- Ejercicio 6.4.

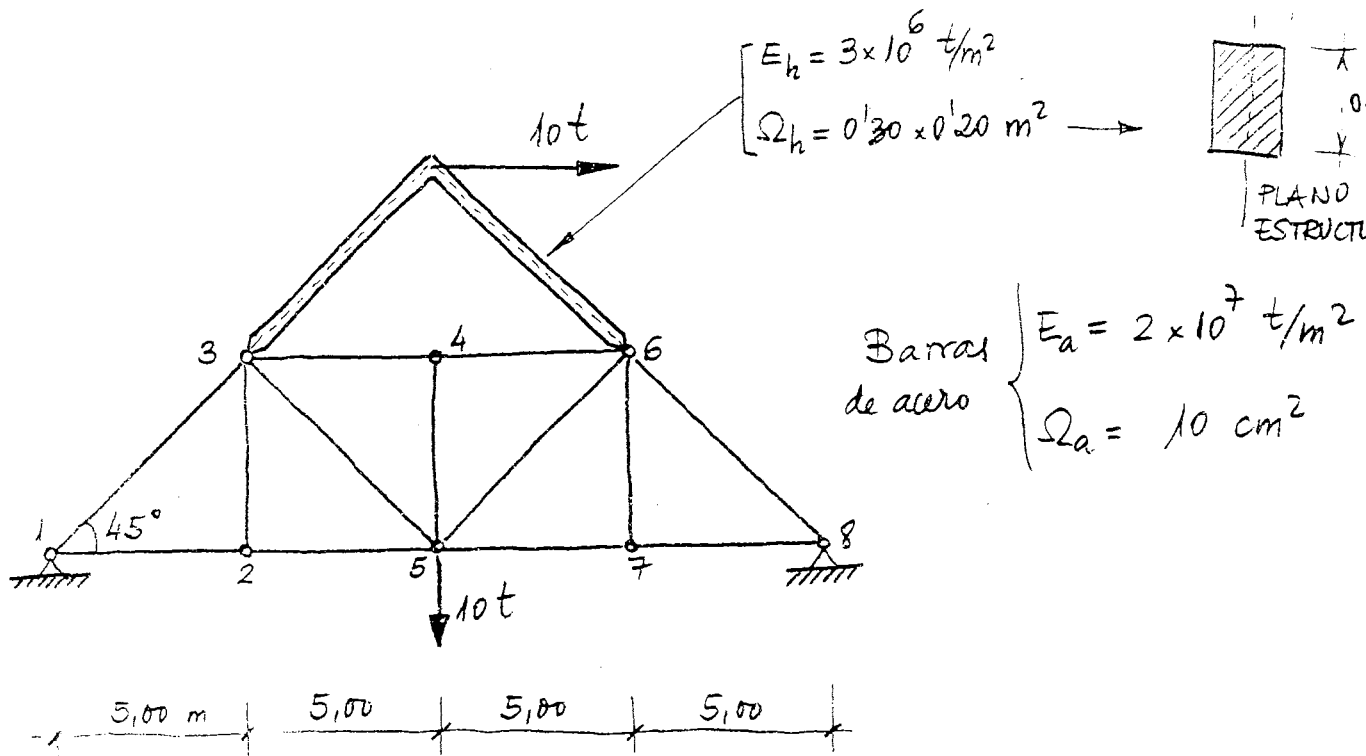
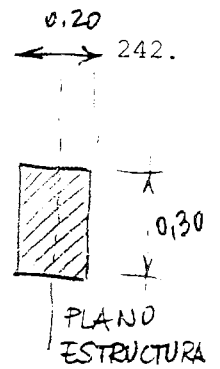


FIGURA 6.14.- Ejercicio 6.5.

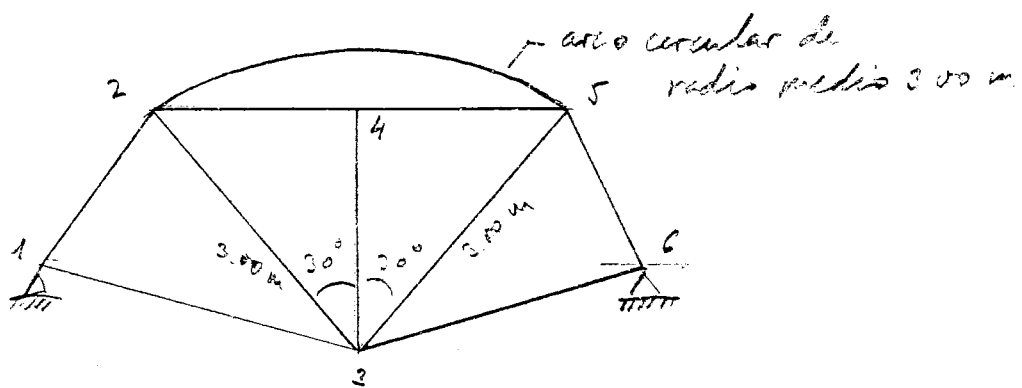


FIGURA 6.15.- Ejercicio 6.6.

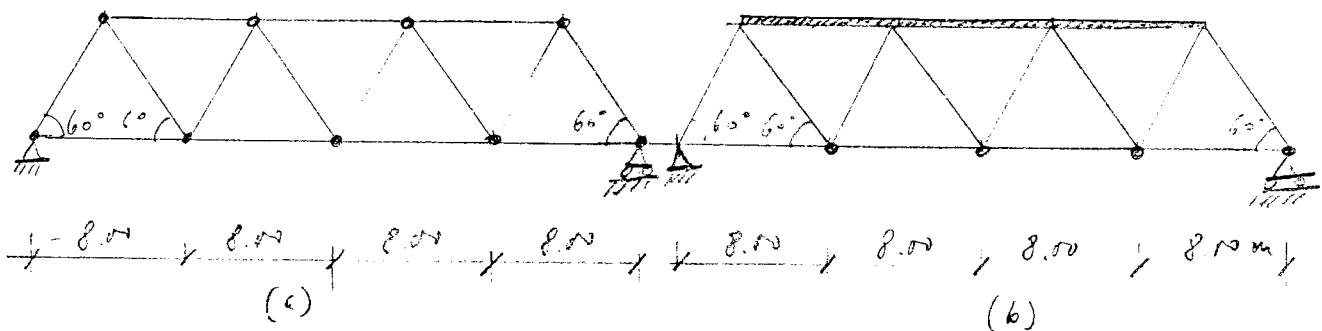


FIGURA 6.16.- Ejercicio 6.7.

las fuerzas exteriores que actúan únicamente en los nudos a excepción de una carga vertical concentrada en 10t en la clave del arco. No existen deformaciones impuestas en las barras. Este estado (0) se ha calculado descomponiendo la fuerza de 10t en dos verticales de 5t actuando en los nudos 2 y 5.

Los estados (2) y (3) corresponden a sendos conjuntos de esfuerzos en autoequilibrio y linealmente independientes.

El estado (3) son los esfuerzos en una estructura isostática básica producidas por la actuación de una fuerza unidad (1t) vertical en la clave del arco 2-5, descomponiéndola únicamente en dos fuerzas verticales de 0.5t en cada uno de los nudos 2 y 5.

Los resultados de los esfuerzos en las barras para cada uno de los estados anteriores se resumen en la tabla , en donde el axil de la barra 2-5, representa en realidad la acción, según la dirección de la cuerda 2-5, de los nudos sobre la barra (tracción, positiva, es decir, que tiende a separar estos nudos).

Se pide:

- (a) Explicar brevemente el significado de los estados (0), (1) y (2), indicándolos en un esquema.
- (b) Esfuerzos finales en la estructura hiperestática.
- (c) Obtener, si es posible la flecha vertical de la clave del arco 2-5 debida a las cargas exteriores citadas. Deducir la fórmula final utilizada en el cálculo.

Para todas las barras rectas $L/E\Omega = 3 \cdot 10^{-3}$ m/t y la sección de la barra curva es tubular con $\phi_{mt} = 60$ mm y espesor de la pared $e = 8$ mm y módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^7$ tm⁻².

BARRA	N_1^0	N_1^1	N_1^2	N_1^3
1-2	-10	1,08	0,42	0,30
1-3	25	2,60	0,92	0,57
2-3	16	-1,12	-0,46	-0,20
2-4	-20	0,00	0,40	0,00
3-4	-8	0,00	0,00	0,00
3-5	20	-1,12	-0,46	-0,26
3-6	28	2,60	0,92	0,57
4-5	-28	0,00	0,40	0,00
5-6	-16	1,08	0,42	0,30
2-5	0	1,00	0,00	0,00

6.7. En el diseño de una pasarela de tablero inferior en celosía se dispone de una solución metálica, cuyas barras son perfiles de 10 cm^2 de sección y módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg.cm}^{-2}$.

Se desea obtener bajo la acción de una carga vertical concentrada de 10t en el nudo 5 (figura a):

1) La flecha vertical del nudo 5 obtenida analíticamente.

Con objeto de reducir el valor de esta flecha se sustituyen las barras de la cabeza superior (2-4, 4-6 y 6-8) por una única barra de hormigón, de sección rectangular de $0,80 \cdot 0,30 \text{ m}^2$ y módulo de elasticidad $2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$, como se indica en la figura b.

En esta situación se pide, bajo la misma hipótesis de carga:

2) Flecha vertical del nudo 5.

NOTAS

No se considera el peso propio y el acortamiento del hormigón es despreciable.

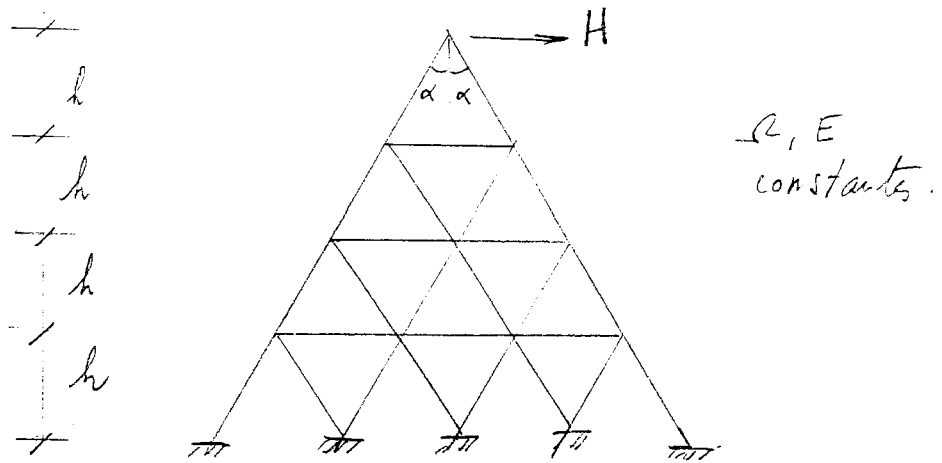


FIGURA 6.17. Ejercicio 6.8.

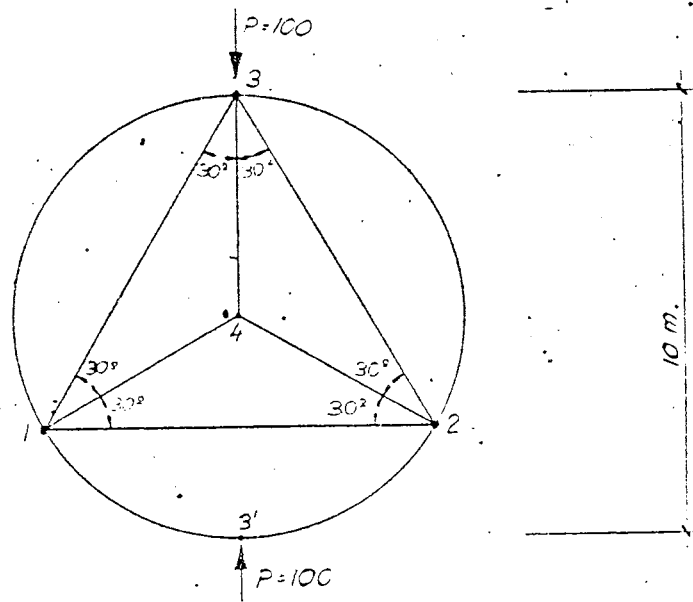


FIGURA 6.18.- Ejercicio 6.9.

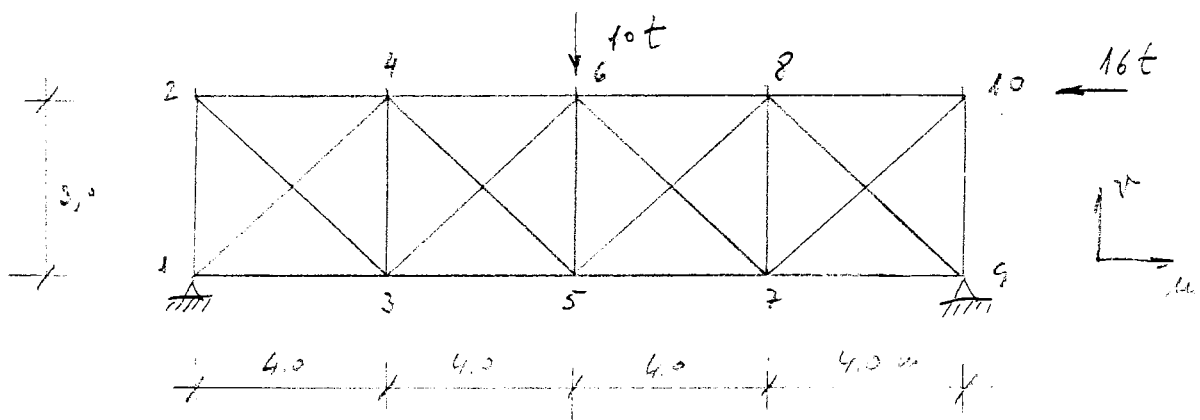


FIGURA 6.19.- Ejercicio 6.10.

6.8. En la estructura articulada de la figura, de cuatro niveles se pide:

-Calcular los esfuerzos en las barras.

-Generalizar el resultado para una estructura de n niveles.

-Fórmula general simplificada para la obtención del movimiento horizontal del vertice, para una estructura de n niveles y aplicación al caso de cuatro niveles.

6.9. En la estructura articulada de la figura, constituida por barras metálicas de módulo de elasticidad $E = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kg.cm}^{-2}$ y sometida a las fuerzas de 100t, el desplazamiento relativo entre los puntos 3 y 3' es de 2 cm.

Determinar: 1) El área de las barras rectas sabiendo que son todas iguales y que las curvas son tubos de sección circular de 0,50 m. de diámetro interior y espesor 1,0 cm. 2) Movimiento relativo entre 3 y 3' si se incrementa la longitud de la barra recta 2-3 por temperatura 5,0 cm.

6.10. Calcular mediante la aplicación del teorema de la energía potencial total mínima, la estructura articulada de la figura. Se supone $L/E\Omega = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m/t}$. Se considerará un sólo grado de libertad.

6.11. La estructura articulada de la figura se encuentra sometida a un conjunto desconocido de acciones (fuerzas en todos los nudos y errores de montaje en las barras diagonales). Los resultados de los esfuerzos en las barras se indican en la tabla siguiente.

BARRA	TONELADAS	BARRA	TONELADAS	BARRA	TONELADAS
1-2	-10	1-5	-4	3-8	-6
2-3	-15	2-6	-26	2-5	-10
3-4	-10	3-7	-10	3-6	14
5-6	13	4-8	-6	4-7	23
6-7	18	1-6	18	4-6	10
7-8	11	2-7	-13	(+) tracción	

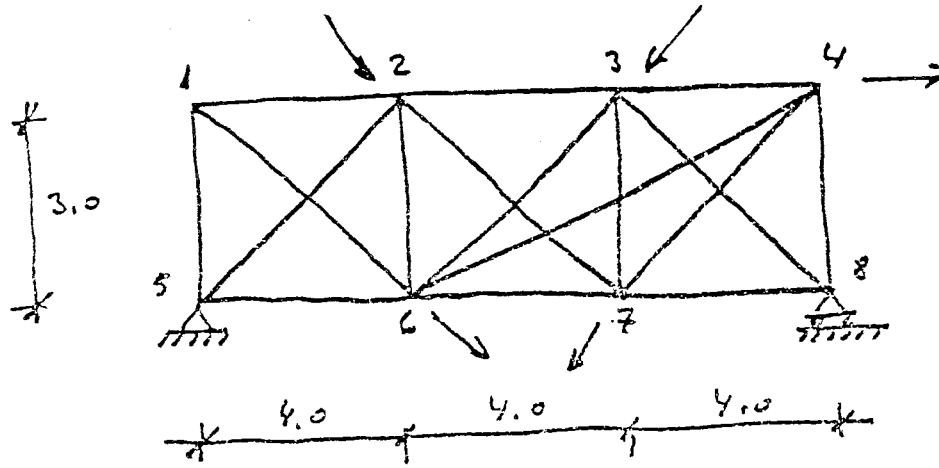


FIGURA 6.20.- Ejercicio 6.11.

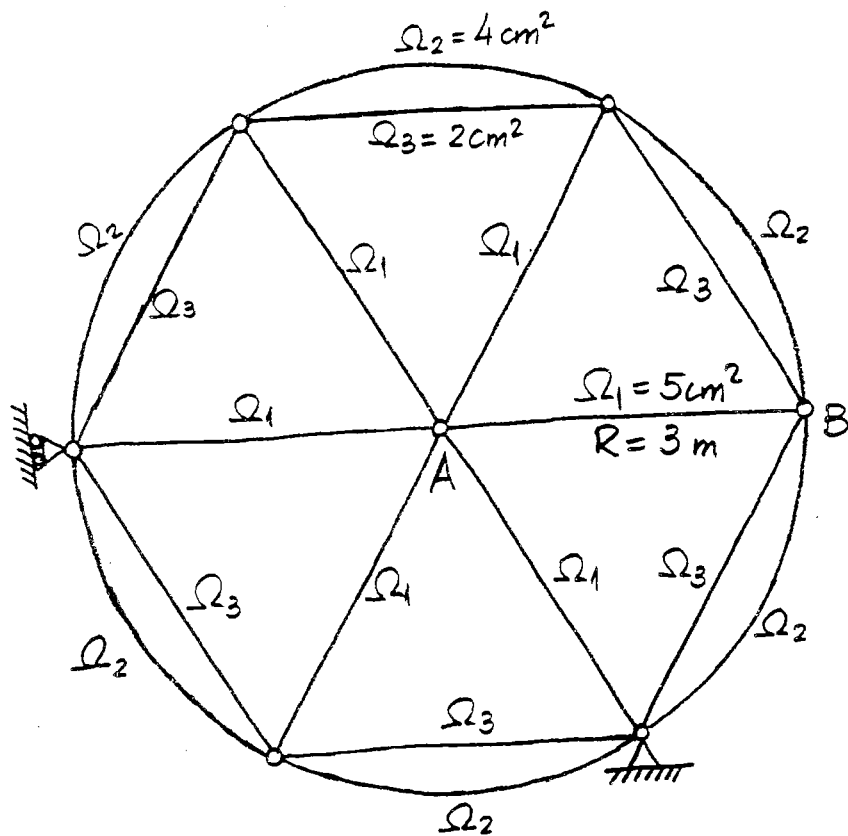


FIGURA 6.21.- Ejercicio 6.12.

Por otra parte, se sabe que la barra 4-6 se ha colocado en la estructura 2 cm más corta que su longitud teórica y que el movimiento relativo final de separación entre los nudos 1 y 6 ha sido de 1 cm.

Todas las barras son de sección constante e igual a 2 cm^2 y su módulo de elasticidad es de $2 \cdot 10^6 \text{ kg.cm}^{-2}$.

Se pide: Movimiento vertical del nudo 6.

6.12. En la estructura de la figura, se pide:

Determinar la inercia de las barras curvas, para que las barras compuestas del contorno (barra curva + barra recta) tengan igual flexibilidad que las barras radiales.

6.13. En la estructura articulada de la figura todas las barras son circulares, de diámetro exterior 10 cm y espesor 1 cm. El radio medio de la estructura es de 1.00 m.

Si la barra 1-2 sufre un acortamiento de 6 cm debido a la temperatura, hallar el movimiento relativo entre los nudos 2 y 4.

6.14. En la estructura de la figura las barras rectas tienen las siguientes características:

$$L = 3,00 \text{ m} ; \quad \Omega = 70 \text{ cm}^2 ; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2.$$

Las barras curvas son de hormigón con un módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ y su sección es de 0,20 . 0,30 m.

Se pide:

- a) Acercamiento relativo entre los nudos 2 y 5.
- b) Esfuerzos en todas las barras rectas.
- c) Ley de esfuerzos en las barras curvas.

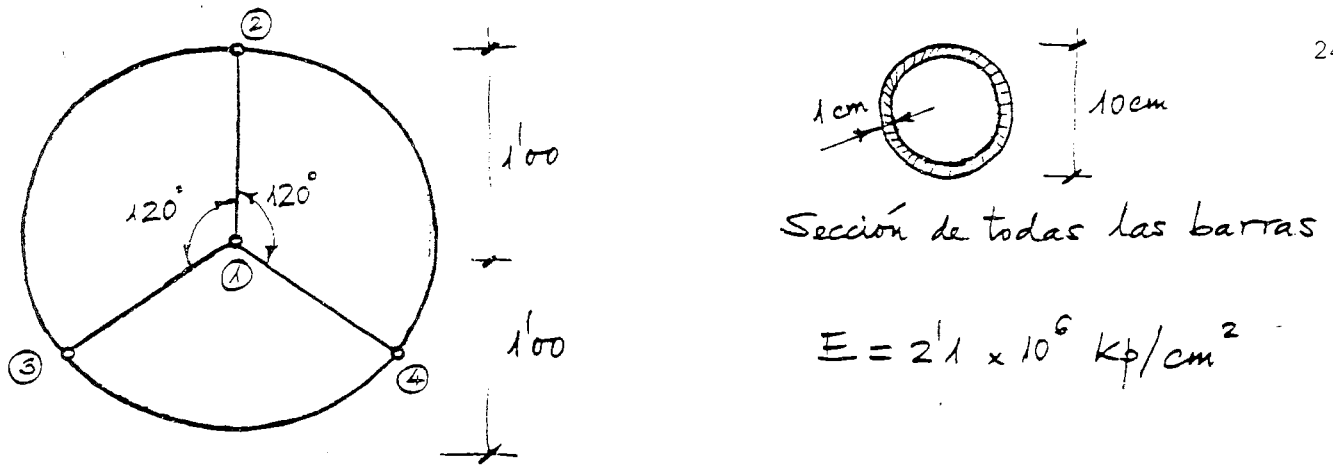


FIGURA 6.22.- Ejercicio 6.13.

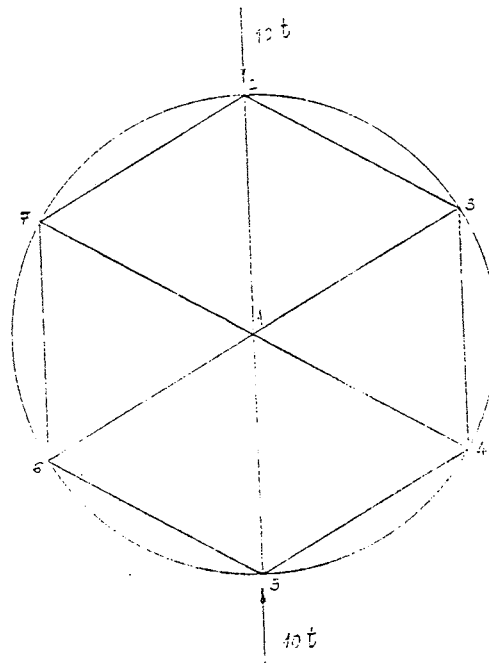


FIGURA 6.23.- Ejercicio 6.14.

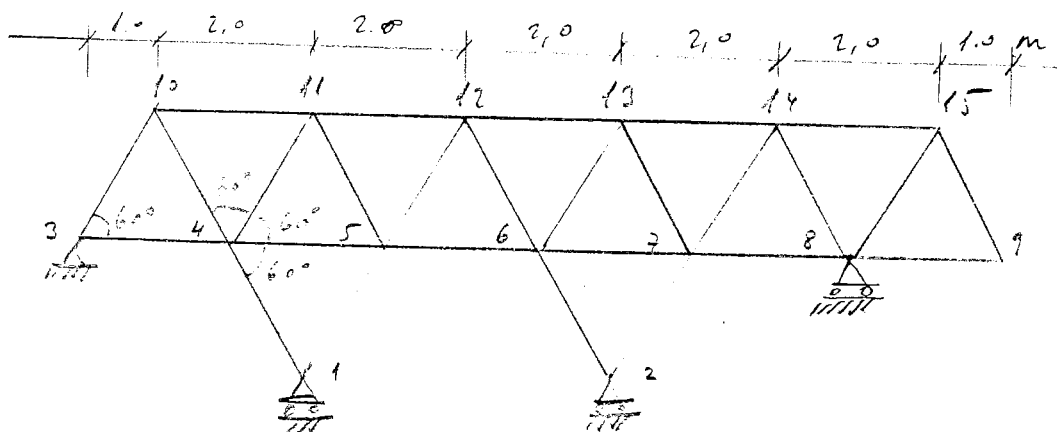


FIGURA 6.24. Ejercicio 6.15.

6.15. En la estructura de la figura se conocen los esfuerzos en todas las barras producidas por unas fuerzas desconocidas exteriores y una variación de longitud Δ_{6-7} en la barra 6-7. Por otra parte, el movi-miento vertical del nudo 13 en esa situación es de 2 cm.

Se pide: 1) ¿Es posible comprobar la corrección de la tabla de es-fuerzos dada? Razónese la respuesta en caso afirmativo y efectuar dicha comprobación, concluyendo si es correcta o no la tabla. 2) Determinar el valor de Δ_{6-7} indicando si es alargamiento o acortamiento.

Las características de todas las barras son $L/E\Omega = 10^{-3}$ m/t a excep-ción de las barras 5-6 y 6-7 para las que puede suponerse que $L/E\Omega = 0$.

TABLA DE ESFUERZOS

BARRA	ESFUERZO	BARRA	ESFUERZO	BARRA	ESFUERZO	BARRA	ESFUERZO
10-11	-4	3-4	2	3-10	-10	10-4	15
11-12	-8	4-5	6	4-11	-8	11-5	7
12-13	-16	5-6	12	5-12	-6	12-6	5
13-14	-7	6-7	14	6-13	-4	13-7	-5
14-15	-1	7-8	2	7-14	6	14-8	-9
		8-9	-2	8-15	12	15-9	-18

.../...

BARRA	ESFUERZO
4-1	-8
5-1	7
6-2	-4
7-2	-5

Todos los esfuerzos en toneladas. Los va-lores de los esfuerzos en las barras horizon-tales, superiores e inferiores, son dudosos.

EJERCICIOS, SOLUCIONES

6.4. Se considera la reacción horizontal en el nudo B(x_B), como incógnita hiperestática:

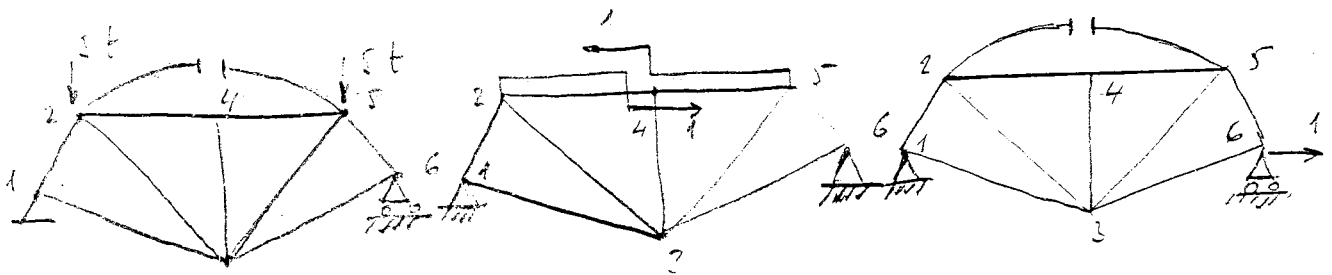
$$U = \frac{1}{2} \sum N_i^2 \frac{1_i}{E\Omega_i} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EI}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_B} = 0 = 1.48417 x_B - 5.1.40 ; \quad x_B = 3.46t$$

Si la rigidez del elemento de hormigón es muy pequeña las reacciones deben ser los mismos del arco triarticulado. ($x_B = 2\sqrt{3} = 3.46t$). Este valor demuestra que la pieza de hormigón es muy flexible y no colabora en la resistencia del conjunto. Si el hormigón fuera de rigidez infinita se obtendría:

$$\frac{\partial U}{\partial x_B} = -0.01022 + 0.00417 x_B = 0 ; \quad x_B = 2.50t$$

6.6. (a) Estados considerados.



Estado (0)

Estado (1)

Estado (2)

(b) Elongabilidad del arco $(1/E\Omega)_{eq} = 13,50 \cdot 10^{-3} \text{ m/t.}$

La deformación inicial del arco debida al traslado de la carga de $10t$ a los extremos es: $\Delta^0 = 31,37 \text{ cm.}$

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\sum_{i=1}^B \Delta_i N_i^1 + x_1 \sum_{i=1}^B (N_i^1)^2 \frac{1_i}{E\Omega_i} + x_i \sum_{i=1}^B N_i^1 N_i^2 \frac{1_i}{E\Omega_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^B \Delta_i N_i^2 + x_1 \sum_{i=1}^B N_i^1 N_i^2 \frac{1_i}{E\Omega_i} + x_2 \sum_{i=1}^B (N_i^2)^2 \frac{1_i}{E\Omega_i} = 0$$

$$\text{con } \Delta_i = N_i^0 \frac{1_i}{E\Omega_i} + \Delta_i^0.$$

De los resultados de la tabla se deduce:

$$\begin{bmatrix} 52,19 \\ 0,62 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,87 & 2,02 \\ 2,02 & 0,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$x_1 = -25,19t; \quad x_2 = 59,85t$$

Los esfuerzos finales son:

BARRA	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	3-6	4-5	5-6	2-5
N_i^F	-12,1	14,6	16,7	3,9	-8,0	20,7	17,6	-4,1	-18,1	-25,4

(c) La flecha propia del arco debido a la acción de la fuerza de 105' y sus reacciones verticales de 5.00t es:

$$f = \frac{1}{EI} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{25R^2}{10} \left(\frac{1}{2} - \sin\theta\right)^2 R d\theta + \frac{1}{EJ} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{25}{10} \sin^2\theta R d\theta$$

$$f = 118,76 \text{ cm.}$$

El movimiento total de la clave es:

$$v_{\text{clave}} = \sum_{i=1}^3 N_i^F N_i^3 \frac{1_i}{E\Omega_i} + N_{2-5}^3 \Delta^0 + N_{2-5}^F \frac{\Delta^0}{10} + f =$$

$$= 0,17 + 0 \cdot 31,37 - 25,2 \cdot 3,137 + 118,76 = 39,88 \text{ cm.}$$

(descendente)

6.7. 1) $v_5 = 2.54$ cm (descendente)

2) Se utiliza el teorema de la energía mínima de deformación complementaria, con M el valor del momento flector en cada uno de los nudos 4 y 6 (positivo con tracciones en la fibra inferior de la barra):

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = 0 = 2.8607M - 11.716 ; \quad M = 4.1 \text{ mt.}$$

La flecha que resulta es: $v_5 = 1.64$ cm.

6.8. Se designa por N_i^j $i, j = 1, 2, \dots, N$ esfuerzos en la barra inclinada correspondiente a la paralela j y situada en el tramo i (comprendida entre dos niveles $i-1$ e i). Las incógnitas hiperestáticas son los esfuerzos en las barras horizontales x_i^j (barra i del nivel j). Dada la antimetría de la figura $x_i^j = -x_{i+1-i}^j$.

Las ecuaciones hiperestáticas (compatibilidad) para $N = 4$ son:

$$2H + 13x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{2}{16} H ; \quad x_2 = -\frac{3}{16} H$$

$$H + 2x_2 + 4x_2 = 0$$

Los esfuerzos con las barras inclinadas son:

$$N_i^1 = (1, 1, \frac{14}{16}, \frac{11}{16})H$$

$$N_i^2 = (0, \frac{4}{16}, \frac{7}{16})H$$

$$N_i^3 = (-\frac{2}{16}, \frac{1}{16})H$$

$$N_i^4 = (-\frac{3}{16})H$$

6.9. Flexibilidad del arco f_a :

$$f_a = \frac{4431.19}{E}$$

Flexibilidad de la barra recta f_r :

$$f_r = 8,8602/E\Omega$$

La flexibilidad conjunta $f = 4431,19/E \cdot 1/1 + 500,12\Omega$

La carga puntual en el arco produce al considerar su equivalencia a dos cargas verticales de 50t únicamente:

- 1) Una flecha $v_3^0 = 0,89$ cm.
- 2) Un alargamiento $\Delta_0 = 0,628/4431,19\Omega + 8,8602$.

La estructura es una vez hiperestática.

BARRA	$1/E\Omega$	N^0	N^1	Δ_0
1-2	f	$\frac{3}{6}P$	$-\frac{1}{3}$	Δ_0
1-3	f	$-\frac{3}{3}P$	$-\frac{1}{3}$	0
1-4	$\frac{5}{E\Omega}$	0	1	0
2-3	f	$-\frac{3}{3}P$	$-\frac{1}{3}$	0
2-4	$\frac{5}{E\Omega}$	0	1	0
3-4	$\frac{5}{E\Omega}$	0	1	0

Energía complementaria mínima:

$$\sum \left\{ (N_i^0 + x N_i^1) \frac{1_i}{E\Omega_i} + \Delta_0 \right\} N^1 = 0$$

$$x = \frac{0,577 \Delta_0 - 50f}{f + 7,5 \cdot 10^{-7}/\Omega}$$

Flecha relativa v_{33} ,

$$v_{33} = \sum \left\{ (N_i^0 + x N_i^1) \frac{l_i}{E\Omega_i} + \Delta_0 \right\} \frac{N_i}{p} + v_3^0$$

$$v_{33} = (75 + 0,5 x) f + 0,2887 \Delta_0 + v_3^0$$

Para $\Omega = 10 \text{ cm}^2$. $v_3 = 2,38 \text{ cm}$.

Para $\Omega = 50 \text{ cm}^2$. $v_3 = 2,08 \text{ cm}$.

6.10. Se tantean las deformadas de una viga simplemente apoyada sometida a una carga puntual en el centro de la luz de $P = 10t$ y un momento en un apoyo de $M = 24 \text{ mt}$.

$$v = \lambda \left\{ \frac{Px}{48EI} (3l^2 - 4x^2) + \frac{M}{6EI} x(l^2 - x^2) \right\}$$

$$0 < x < \frac{l}{2} \quad 0 < x < l$$

$$\theta_1 = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,0547\lambda ; \quad \theta_2 = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=16,0} = 0,0704\lambda$$

Los movimientos de los nudos son:

NUDO	u/λ	v/λ	BARRA	Δ/λ	BARRA	Δ/λ	BARRA	Δ
1	0	0	1-3	0	1-4	-0,1025	1-2	0
2	0.0547	0	3-5	0	3-6	-0,0663	3-4	0
3	0	-0,202	5-7	0	5-8	+0,0149	5-6	0
4	0.0234	-0,202	7-9	0	7-10	+0,0787	7-8	0
5	0	-0,302	2-4	-0,0313	2-3	0,0774	9-10	0
6	-0.0079	-0,302	4-6	-0,0313	4-5	0,0413		
7	0	-0,225	6-8	-0,0312	6-7	-0,0399		
8	-0.0391	-0,225	8-10	-0,0313	8-9	-0,1037		
9	0	0						
10	-9.0704	0						

$$\Delta_{ij} = (u_j - u_i) \cos \alpha_{ij} + (v_j - v_i) \sin \alpha_{ij}$$

con

$$l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad \sin \alpha_{ij} = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}}; \quad \cos \alpha_{ij} = \frac{x_j - x_i}{l_{ij}}$$

$$V = U - W = \frac{1}{2} \sum \frac{E\Omega_i}{l_i} \Delta_i^2 - P \cdot v_6 - M u_{10}$$

$$V = \frac{45,2786}{4} \lambda^2 - (3,0200 - 1,1264)\lambda; \quad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0$$

$$\lambda = \frac{4,1464 \cdot 2}{45,2786} = 0,1832 \text{ "}$$

Con este resultado se puede determinar flechas en todos los nudos y los esfuerzos en las barras. La aproximación mejora con el número de parámetros. En el ejemplo, se ha supuesto una ley poco razonable de movimientos horizontales.

6.11.

BARRA	N	NL/EΩ	Δ ₀	N ¹	N ¹ (Δ ₀ + NL/EΩ)
1-2	-10	-1		-0.89	0.890
2-3	-15	-1.5		-0.89	1.335
3-4	-10	-1.0		-0.89	0.890
1-5	-4	-0.3		-0.67	0.200
4-8	-6	-0.45		-0.33	0.149
1-6	18	2.25		1.11	1.111
6-4	10	1.25	-0.02	0.95	-0.713

6.13. Barras rectas $f_r = L/E\Omega = 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ cm/t.}$

Barras curvas $f_c = L/E\Omega = 449 \cdot 10^{-3} \text{ cm/t.}$

El mínimo de la energía complementaria de deformación conduce a $x = -7,63t$.

Se acercan los nudos 2 y 4 $v_{24} = 3,43 \text{ cm.}$

$$6.14. f_c = 3,427 \cdot 10^{-4} \text{ m/t.}$$

$$f_r = 0,214 \cdot 10^{-4} \text{ m/t.}$$

Flexibilidad conjunta:

$$f = f_c \cdot f_r / f_c + f_r = 0,201 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

$$N_{2-3} = N_{3-4} = N_{4-5} = N_{5-6} = N_{6-7} = N_{7-2} = -x$$

$$N_{1-3} = N_{1-4} = N_{1-6} = N_{1-7} = x$$

$$N_{1-2} = N_{1-5} = x - 10$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = 0, \text{ conduce a } N = 1,719t$$

$$v_{2-5} = 0,354 \text{ mm.}$$

- 6.15. La estructura es dos veces hiperestática, y se conocen las deformaciones en todas las barras. En la barra 6-7 se determina Δ_{6-7} mediante la aplicación del teorema de la fuerza unidad en el mecanismo 2-6-7-13, al conocer el movimiento virtual del nudo 13.

A partir de un Williot o bien mediante la aplicación del teorema de la fuerza unidad a dos coacciones (independientes) se puede plantear las dos condiciones que deben de cumplir las deformaciones de todas las barras.

CAPITULO 7.- LINEAS DE INFLUENCIA

7.1. DEFINICION

Frecuentemente existen estructuras que se encuentran sometidas a fuerzas móviles, es decir, que pueden variar su posición geométrica o su punto de aplicación. Es el caso de las estructuras de puentes, que son recorridas por diferentes vehículos. Un problema importante en el cálculo de estas estructuras consiste en conocer cómo varía la respuesta de la estructura (movimiento o esfuerzo de una sección determinada) cuando cambia de posición el conjunto de cargas que definen el tren y, de esta forma determinar los valores extremos -máximos y mínimos- del resultado que se está investigando. Las líneas de influencia permiten resolver este problema en el caso de estructuras que se comportan linealmente.

Se entiende por línea de influencia de un determinado resultado o respuesta R de la estructura -movimiento, deformación, esfuerzo o reacción- en una sección o nudo determinados, a la curva $R = r(x)$, que representa la variación del resultado R cuando la carga unitaria se encuentra situada en la posición de la estructura definida por x. Se supone estructura monodimensional, es decir, que es suficiente un parámetro (arco o abscisa) para definir una sección. En el caso de estructuras bidimensionales -placas, láminas delgadas, etc.- serían precisos dos parámetros (x_1, x_2) para definir unívocamente la posición de la carga unitaria móvil y, por lo tanto, se denominaría la relación $R = R(x_1, x_2)$ como superficie de influencia. A veces el recorrido de variación de la carga móvil se restringe a una parte de la estructura, donde se supone puede actuar dicha carga.

Por consiguiente, para establecer una línea de influencia es preciso definir; (a) El resultado a estudiar: tipo (movimiento, esfuerzo, etc.) y situación (sección, barra, etc.) (b) La carga móvil unitaria (fuerza o momento, con su sentido, y zona de la estructura que recorre).

Una vez conocida la línea de influencia, es posible deducir los resultados pésimos de la sección en estudio, mediante superposición, que es válida al ser la estructura de comportamiento lineal. Por lo tanto, si exis-

te un conjunto de cargas puntuales P_i , el resultado total que producen es:

$$R = \sum_{i=1}^I P_i y_i \quad (7.1)$$

siendo y_i la ordenada en la línea de influencia correspondiente al punto de aplicación de la carga P_i definido por la distancia x_i , es decir $y_i = r(x_i)$.

Si existe una carga repartida de intensidad $p(x)$ y extendida en el tramo de estructura $a \leq x \leq b$, el resultado total es, en este caso:

$$R = \int_a^b y p(x) dx = \int_a^b r(x) p(x) dx \quad (7.2)$$

En el caso de un tren de cargas móvil, consistente en un conjunto de fuerzas separadas a distancias invariables entre sí, el cálculo anterior se lleva a cabo para sucesivas posiciones del tren (definidas, por ejemplo, por su distancia $x = \alpha$ a una de las fuerzas), obteniéndose así la línea de influencia del tren de fuerzas como función de la posición α , es decir:

$$R = R(\alpha) \quad (7.3)$$

Esta función se analiza, y, en particular, se pueden determinar los valores de α ($\alpha_{\text{máx}}$ y $\alpha_{\text{mín}}$), posiciones del tren que producen resultados, (R) , máximo y mínimo, en la sección de estudio de la estructura.

7.2. TEOREMA DE RECIPROCIDAD O DE MAXWELL

Una línea de influencia $R = R(x)$ puede obtenerse de un modo inmediato, calculando la estructura para cada una de las sucesivas posiciones x de la carga móvil unitaria. Este procedimiento es engorroso, y generalmente se utilizan otros, basados en los teoremas energéticos, y en particular en una consecuencia importante de los mismos denominada teorema de Maxwell o de reciprocidad.

Este teorema se establece para estructuras conservativas, es decir, que el trabajo total (exterior e interior) solo depende de los estados inicial y final de la estructura pero no de la forma de transición de uno a otro.

Sea una estructura E sometida a un conjunto de acciones definido por unas fuerzas Q_{i1}^1 aplicadas en los grados de libertad $i1 \in A_1$.

Asímismo, se define en la misma estructura, otro estado de cargas Q_{i2}^2 correspondiente a fuerzas aplicadas en los grados de libertad $i2 \in A_2$.

El estado resultante de la estructura suma de los dos estados anteriores será idéntico, independiente del orden de aplicación de las cargas; en particular, la energía potencial de ese estado resultante será la misma si se aplica primero las acciones del estado 1 y a continuación las del 2 o viceversa. A continuación se evalúa la energía potencial (o salvo el signo, el trabajo efectuado por las cargas exteriores) en ambos casos. Para ello, es conveniente obtener los valores de W_1^1 y W_2^2 correspondientes al trabajo de las fuerzas externas de los estados aislados 1 y 2 respectivamente:

$$\begin{aligned} W_1^1 &= \sum_{e1 \in A_1} Q_{i1}^1 q_{i1}^1 \\ W_2^2 &= \sum_{i2 \in A_2} Q_{i2}^2 q_{i2}^2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

El paso al estado final resultante, como aplicación de las acciones del estado 1 y a continuación las del estado 2 conduce al siguiente resultado del trabajo de las fuerzas externas de la estructura:

$$W = W_1^1 + W_2^2 + W_1^2 \quad (7.5)$$

en donde W_1^2 representa el incremento del trabajo exterior originado por las fuerzas Q_{i1}^1 al producirse unos movimientos q_{i1}^2 en los gdl $i1 \in A_1$ por la aplicación de las cargas del estado 2, Q_{i2}^2 . Su expresión es:

$$W_1^2 = \sum_{i1 \in A_1} Q_{i1}^1 q_{i1}^2 \quad (7.6)$$

De un modo semejante, el trabajo externo de la estructura final, su ma de todas las cargas, puede obtenerse como superposición sucesiva de los estados 2 y 1, es decir:

$$W = W_2^2 + W_1^1 + W_2^1 \quad (7.7)$$

con W_2^1 el trabajo debido a las fuerzas Q_{i2}^2 al producirse los movimientos q_{i2}^1 causados por la aplicación de las cargas Q_{i1}^1 , es decir:

$$W_2^1 = \sum_{i2 \in A_2} Q_{i2}^2 q_{i2}^1 \quad (7.8)$$

La comparación de las expresiones (7.5) y (7.7) conduce al teorema de Maxwell:

$$W_1^2 = W_2^1 \quad (7.9)$$

que desarrollando, teniendo en cuenta las igualdades (7.6) y (7.8) conduce a la expresión equivalente siguiente:

$$\sum_{i1 \in A_1} Q_{i1}^1 q_{i1}^2 = \sum_{i2 \in A_2} Q_{i2}^2 q_{i2}^1 \quad (7.10)$$

Este teorema puede enunciarse como sigue: El trabajo producido por un grupo de fuerzas Q_{i1}^1 actuando sobre una estructura al moverse sus puntos de aplicación como consecuencia de la introducción de otro grupo de fuerzas Q_{i2}^2 es igual al trabajo producido por estas últimas fuerzas como consecuencia de los movimientos originados por las primeras.

Ejemplo 7.1.

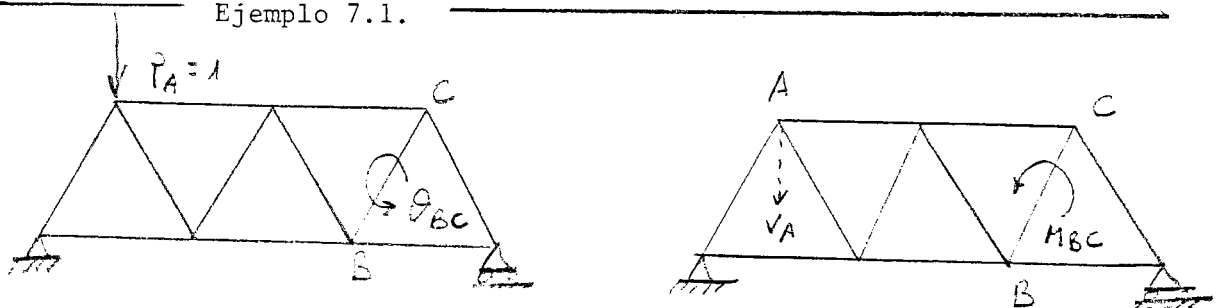


Figura 7.1.- Ejemplo 7.1.

El giro (θ_{BC}) de la barra BC de la figura 7.1, producido por una fuerza unidad vertical (P_A) en el nudo A, es igual al desplazamiento vertical (V_A), eficaz con la fuerza (P_A), que se produce en el nudo A cuando actúa en la estructura un momento unidad M_{BC} , eficaz con el giro θ_{BC} , en la barra BC.

Este ejemplo es una consecuencia inmediata del teorema de reciprocidad aplicado a los estados 1 y 2 de la figura 7.1. En efecto, se obtiene:

$$(P_A^1 = 1) \cdot V_A^2 = (M_{BC}^2 = 1) \cdot \theta_{BC}^1$$

es decir $V_A^2 = \theta_{BC}^1$

o bien con la notación del problema: $V_A = \theta_{BC}$.

El teorema de Maxwell puede generalizarse, considerando que las acciones sobre la estructura no se restringen en cada estado a unas fuerzas únicamente. Es posible considerar otro tipo de acciones internas (deformaciones y tensiones o esfuerzos impuestos) así como movimientos especificados en ciertos gdl. En este caso, es preciso considerar, que la energía de deformación interna se ve incrementada al aplicarse un nuevo estado en la estructura, por lo que es preciso utilizar como invariante la energía potencial total de la estructura. Utilizando un razonamiento semejante al caso anterior del teorema de Maxwell se puede escribir:

$$V = U - W = V_1^1 + V_2^2 + V_1^2 \quad (7.11)$$

$$V = U - W = V_2^2 + V_1^1 + V_2^1 \quad (7.12)$$

Las expresiones de las energías potenciales totales de cada uno de los estados aislados V_2^2 y las cruzadas V_1^j se obtienen como sigue:

Sean \bar{Q}_{i1}^1 , \bar{q}_{y1}^1 , \bar{N}_{k1}^1 y $\bar{\Delta}_{11}^1$ las fuerzas, movimientos, esfuerzos y deformaciones impuestos en los gdl $i1 \in A_1$ y $j1 \in B_1$ y barras $k1 \in C_1$ y

$11 \in D_1$ de la estructura, que definen el estado 1 de acciones. Análogamente, se designan por \bar{Q}_{i2}^2 , \bar{q}_{j2}^2 , \bar{N}_{k2}^2 y $\bar{\Delta}_{12}^2$ las correspondientes acciones del estado 2.

El teorema generalizado de Maxwell establece la siguiente igualdad:

$$V_1^2 = V_2^1 \quad (7.13)$$

o bien desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k1 \in C_1} \bar{N}_{k1}^1 \Delta_{k1}^2 + \sum_{11 \in D_1} N_{k1}^2 \bar{\Delta}_{11}^1 - \sum_{i1 \in A_1} \bar{Q}_{i1}^1 q_{i1}^2 - \sum_{j1 \in B_1} Q_{j1}^2 \bar{q}_{j1}^1 = \sum_{k2 \in C_2} \bar{N}_{k2}^2 \Delta_{k2}^1 + \\ + \sum_{12 \in D_2} N_{12}^1 \bar{\Delta}_{12}^2 - \sum_{i2 \in A_2} \bar{Q}_{i2}^2 q_{i2}^1 - \sum_{j2 \in B_2} Q_{j2}^1 \bar{q}_{j2}^2 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Se ha utilizado la situación Q_n^m , q_n^m , N_n^m y Δ_n^m los resultados del cálculo del estado m en el gdl o barra n (fuerzas o recursos, movimientos, esfuerzos y deformaciones respectivamente).

Estos teoremas tienen aplicación inmediata a la determinación de líneas de influencia. A efectos de exposición, es conveniente considerar dos tipos de líneas de influencia, las correspondientes a magnitudes cinemáticas (movimientos y deformaciones) y las referentes a estáticas (fuerzas y esfuerzos). Estas últimas se comprobará que pueden ser obtenidas mediante aplicación del teorema de Maxwell como en el primer tipo o bien es preciso recurrir a la generalización del teorema si se desea conservar la simetría o dualidad en el cálculo de las líneas de influencia de magnitudes estáticas.

7.3. Líneas de influencia de magnitudes cinemáticas. Método dual

Con objeto de deducir el procedimiento general del cálculo de una línea de influencia de un movimiento, se estudia un ejemplo sencillo.

En la estructura de la figura 7.2 se desea obtener la línea del desplazamiento horizontal de A, debida a una carga inclinada unitaria que recorre la cabeza superior de la estructura.

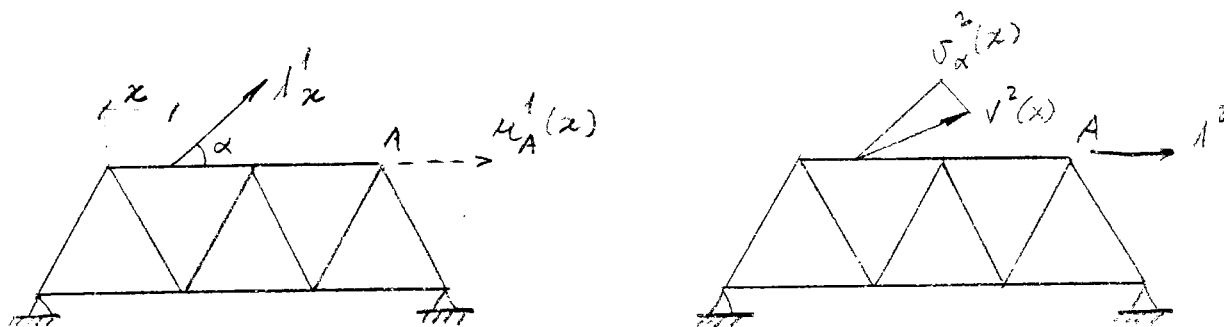


Figura 7.2.- Línea de influencia de movimientos.

Se aplica el teorema de Maxwell a los estados 1 y 2 siguientes: El estado 1 se define en la figura 7.2(a) y se considera el estado 2, correspondiente a la actuación de la estructura de una acción unidad eficaz con el movimiento cuya línea de influencia se estudia: en este caso, una fuerza unidad horizontal aplicada en A.

La aplicación del teorema conduce a la igualdad:

$$1_x^1 \cdot v_\alpha^2(x) = 1_A^2 \cdot u_A^1(x)$$

o bien

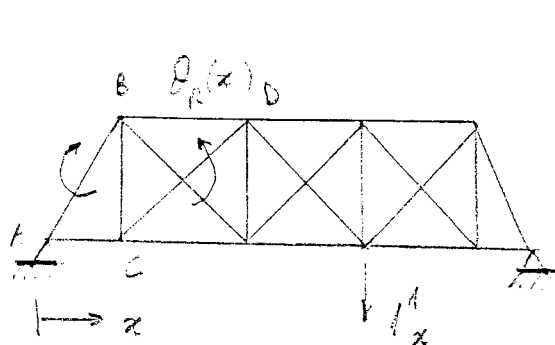
$$u_A(x) = v_\alpha(x)$$

en donde $v_\alpha(x) = v_\alpha^2(x)$ corresponde a la flecha producida en la sección x del cordón superior debida a la actuación de la fuerza horizontal unidad en A (estado 2). Esta flecha ha de ser eficaz con la carga móvil, es decir, si $v^2(x)$ es el movimiento de la sección se debe proyectar sobre la dirección de la fuerza móvil, con su signo correspondiente, de acuerdo con la construcción que se indica en la figura 7.2, para obtener $v_\alpha^2(x)$.

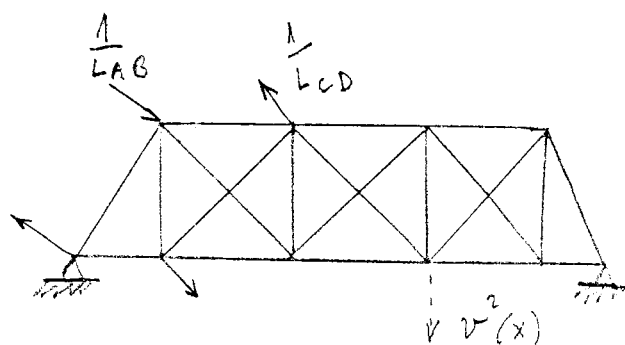
Del ejemplo comentado se deduce, en general, que la línea de influencia de un movimiento u_A (desplazamiento, giro, movimiento relativo, etc.) cuando actúa una fuerza móvil unidad, $P_x = 1$ (fuerza, momento, conjunto de fuerzas, etc.), es igual a la deformada $V(x)$ eficaz con la fuerza móvil P_x , producida por la acción unitaria eficaz con el movimiento u_A .

Por lo tanto, la línea de influencia de un movimiento se reduce a la determinación de la deformada de la estructura en el estado 2, y que se puede obtener gráficamente mediante el procedimiento de Williot.

Ejemplo 7.2.



Estado 1



Estado 2

Figura 7.3. Ejemplo 7.2.

Línea de influencia del giro relativo entre las barras AB y CD.
(Figura 7.3).

De la aplicación del teorema de Maxwell resulta:

$$\frac{1}{x} \cdot v^2(x) = \theta_R^1(x) \cdot 1^2$$

es decir

$$\theta_R(x) = v(x)$$

Es preciso calcular el estado 2 la ley de flechas verticales del cordón inferior.

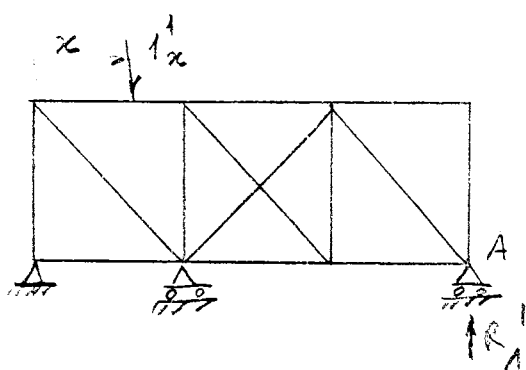
7.4. Líneas de influencia de magnitudes

La determinación de este tipo de líneas de influencia (de reacciones y esfuerzos) se puede llevar a cabo de un modo dual al comentado en el apartado anterior 7.3. Se hará preciso considerar en algunos casos el teorema de Maxwell generalizado con objeto de deducir el procedimiento de cálculo adecuado. A continuación se exponen dos ejemplos, uno de ellos de determinación de reacciones y el otro de un esfuerzo en una barra, para ilustrar el planteamiento del análisis.

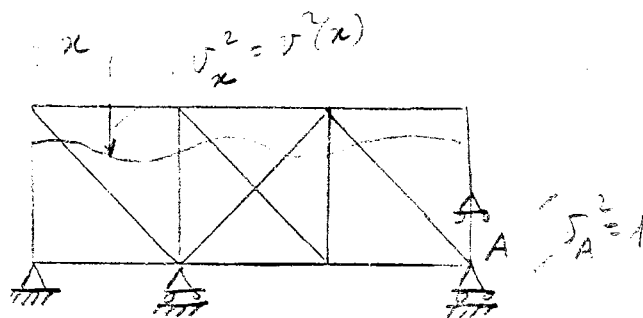
7.4.1. Línea de influencia de una reacción

En la estructura de la figura 7.4(a), se desea obtener la línea de influencia de la reacción en el apoyo A, cuando actúa una carga vertical descendente móvil a lo largo de la cabeza superior.

Para ello, se considera un nuevo estado de cargas (estado 2) representado en la figura 7.4(b), correspondiente a la actuación de un movimiento unidad vertical (eficaz con la reacción) en el apoyo A.



(a) Estado 1



(b) Estado 2

Figura 7.4.- Línea de influencia de una reacción.

La aplicación del teorema de Maxwell a los dos estados de carga conduce a la siguiente igualdad:

$$(1_x^1)v^2(x) + R_A^1(\delta_A^2 = 1) = 0$$

es decir

$$R_A = -v^2(x) = -v(x) \quad (7.15)$$

Por consiguiente, la línea de influencia deseada coincide con la deformada del cordón superior -en este caso- del estado 2, cambiada de signo.

Si la estructura es isostática externa, la deformada anterior se obtiene, como se indica en la figura 7.5, mediante un simple movimiento de sólido rígido (giro alrededor del otro apoyo en el caso que se estudia).

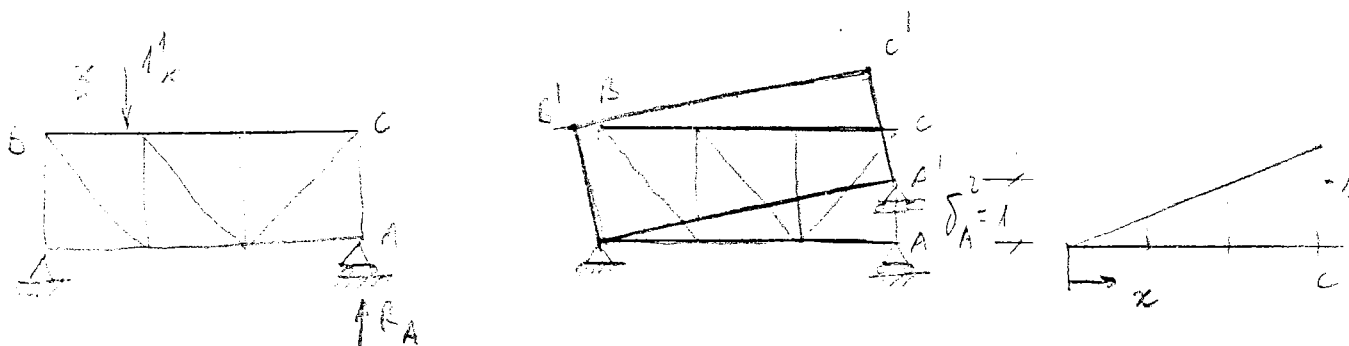


Figura 7.5.- Línea de influencia en estructuras isostáticas.

Por el contrario si la estructura es externamente hiperestática, es preciso utilizar los procedimientos de determinación de movimientos en este tipo de estructuras, expuestas en el capítulo anterior. Así en la determinación de la línea de influencia de la figura 7.4, se efectúan los siguientes cálculos:

1. Obtención de los esfuerzos de la estructura debidos a un asiento unitario en el gdl correspondiente a la reacción cuya línea de influencia se desea conocer. Estos esfuerzos N_i , se deducen como es usual en una estructura hiperestática de orden α , como suma de α estados de esfuerzos N_i^n ($n=1,2,\dots,\alpha$):

$$N_i = \sum_{n=1}^{\alpha} X_n N_i^n \quad (*) \quad (i = 1, 2, \dots, B) \quad (7.16)$$

Los valores de las hiperestáticas X_n se calculan mediante el sistema:

$$\sum_{i=1}^B \Delta_i N_i^n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \alpha-1)$$

$$\sum \Delta_i N_i^\alpha = 1 \quad (7.17)$$

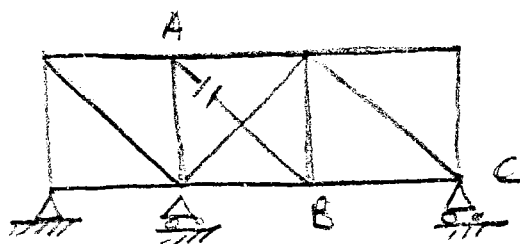
con $\Delta_i = N_i (1/E\Omega)_i$ la deformación final de la barra i .

Se ha supuesto por simplicidad de cálculo, que los esfuerzos del estado α , N_i^α , corresponden a los producidos por la fuerza reacción hiperestática cuya línea de influencia se está determinando.

2. Una vez obtenidos los valores de X_n , se deducen los esfuerzos finales N_i y a partir de estos esfuerzos las deformaciones finales de las barras, lo que permite, mediante un Williot por ejemplo, determinar los movimientos en todos los nudos de la estructura y en particular en los del cordon superior $v^2(x)$.

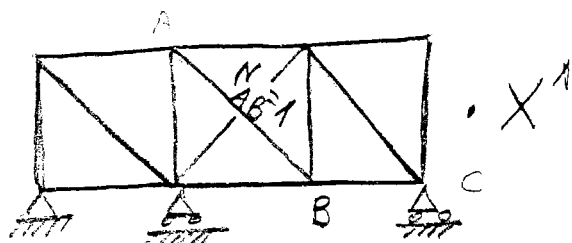
La figura 7.6 ilustra el cálculo anterior.

NOTA(*): Se observa la inexistencia de un estado (0) N_i^0 al no actuar fuerzas externas.

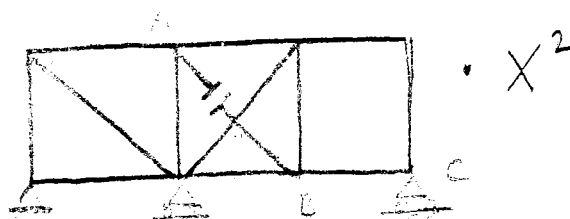


$$N_i = N_i^0 + X^1 N_i^1 + X^2 N_i^2$$

$$\text{Estado 0} \quad N_i^0 = 0$$



$$\text{Estado 1} \quad N_i^1$$

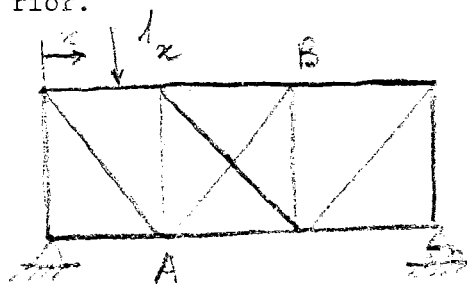


$$\text{Estado 2} \quad N_i^2$$

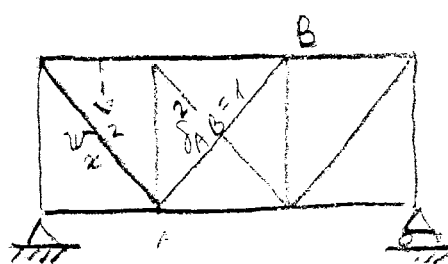
Figura 7.6.- Cálculo de una estructura hiperestática.

7.4.2. Línea de influencia de un esfuerzo

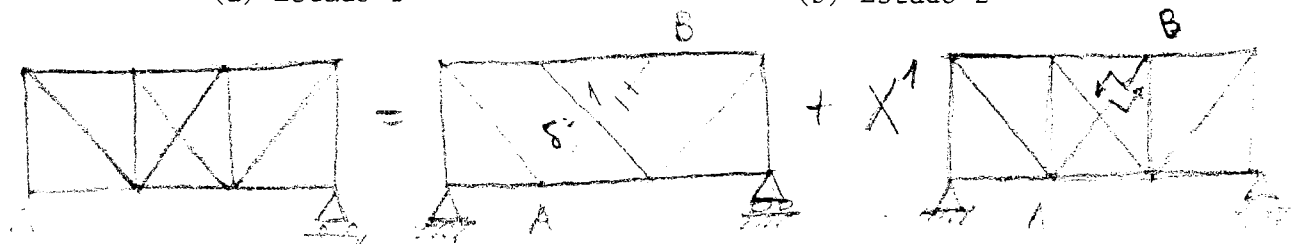
Como ejemplo, para particularizar la exposición, se considera la línea de influencia del esfuerzo en la barra A-B de la estructura de la figura 7.7 cuando la carga vertical descendente recorre el cordón superior.



(a) Estado 1



(b) Estado 2



(c) Resolución del estado 2

Figura 7.7.- Línea de influencia de un esfuerzo.

Si se adopta como estado auxiliar (estado 2) de cargas, el correspondiente a una deformación unitaria impuesta en la barra A-B de la estructura y se aplica el teorema generalizado de Maxwell a los dos estados que ilustra la figura 7.7 se obtiene:

$$-(1_x^1)v^2(x) + N_{AB}^1(\delta_{AB}^2 = 1) = 0$$

o bien

$$N_{AB} = N_{AB}^1 = v^2(x) \quad (7.18)$$

Es decir, la línea de influencia coincide con la deformada del cordón superior producida por la actuación de una deformación unitaria en la barra A-B.

La deformada del estado (2) de carga si la estructura es isostática, se puede obtener simplemente mediante un Williot en el que las deformaciones de todas las barras son nulas a excepción de la barra AB.

Por el contrario si la estructura es α veces hiperestática, se procede como es usual, en estas situaciones. Los esfuerzos finales de la estructura son:

$$N_i = \sum_{n=1}^{\alpha} X_n N_i^n$$

Las ecuaciones de compatibilidad que permiten obtener los valores de las hiperestáticas X_n son:

$$\sum_{i=1}^B \Delta_i N_i^n = 0 \quad n = 1, 2, \dots, \alpha$$

siendo

$$\Delta_i = N_i \left(\frac{1}{E\Omega} \right)_i \quad \text{si} \quad i \neq AB$$

(7.19)

$$\Delta_{AB} = N_{AB} \left(\frac{1}{E\Omega} \right)_{AB} + 1$$

Una vez calculados los valores X_i^n , se deducen las deformaciones reales Δ_i de todas las barras mediante (7.19) y de ahí, los movimientos en todos los nudos de la estructura.

Ejemplo 7.3.

Determinar las líneas de influencia de la reacción R_A del apoyo A y de la barra 4-5 cuando una carga vertical descendente recorre el cordón superior de la estructura de la figura 7.7a.

El estado 1 corresponde a una reacción unitaria ($R_3 = 1$) en el apoyo 3. El estado 2 se obtiene con un esfuerzo no nulo ($N_{4-5} = 2$) en la barra 2. Los valores de los esfuerzos en estos dos estados hiperestáticos son:

BARRA	N_i^1	N_i^2	$(N_i^1)^2$	$(N_i^2)^2$	$N_i^1 N_i^2$	$\Delta_i^{(a)}$	$\Delta_i^{(b)}$
1-2	0	-2/3	0	4/9	0	-1.84	0.07
1-3	0	0	0	0	0	0	0
2-3	0	$2\sqrt{2/3}$	0	8/9	0	2.60	-0.10
2-4	0	-2/3	0	4/9	0	-1.84	0.07
3-4	$-\sqrt{2}$	0	2	0	0	0.34	0.17
3-5	$-\sqrt{2}$	1/3	2	1/9	$-\sqrt{2/3}$	1.26	0.14
3-6	2	$\sqrt{2/3}$	4	2/9	$2\sqrt{2/3}$	0.82	-0.29
4-5	2	0	4	0	0	-0.48	0.76
4-6	$-\sqrt{2}$	-2/3	2	4/9	$2\sqrt{2/3}$	-1.50	0.24
5-6	$-\sqrt{2}$	0	2	0	0	0.74	0.17
5-7	0	1/3	0	1/9	0	0.92	-0.04
6-7	0	$-\sqrt{2/3}$	0	2/9	0	-1.30	0.05
6-8	0	0	0	0	0	0	0
7-8	0	0	0	0	0	0	0

$$\begin{matrix} 1/6 & 26/9 & \sqrt{2} \end{matrix}$$

El sistema hiperestático es:

$$L/E\Omega \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 26/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$x_1 = -0.24 \frac{E\Omega}{1} \quad \text{y} \quad x_2 = 2.76 \frac{E\Omega}{1}$$

Los esfuerzos finales son:

$$N_i = x_1 N_i^1 + x_2 N_i^2$$

Las deformaciones finales se representan en la tabla, y han sido obtenidas mediante la igualdad:

$$\Delta_i^{(a)} = N_i \frac{l_i}{E\Omega_i}$$

La realización del Williot con las anteriores deformaciones conducen a los valores de la línea de influencia de la reacción:

NUDO	2	4	6	8
VALOR	0.241	0.955	0.689	0 t

(b) Esfuerzo barra 4-5.

Las ecuaciones hiperestáticas son, en este caso, las siguientes:

$$\frac{L}{E\Omega} \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 29/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es: $x_1 = -0.12 E\Omega/1$ y $x_2 = -0.11 E\Omega/1$.

Las deformaciones finales son:

$$\Delta_i^{(b)} = N_i \frac{l_i}{E\Omega_i} + \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 4-5 \\ 1 & \text{si } i = 4-5 \end{cases}$$

y los valores de la línea de influencia del axil N_{4-5} son:

NUDO	2	4	6	8
VALOR	-0.021	0.092	-0.015	0 t

Por consiguiente se puede resumir el siguiente procedimiento de de terminación de líneas de influencia de reacciones y esfuerzos: La línea de influencia de una fuerza J_A (esfuerzo o reacción) cuando actúa una fuerza móvil unidad ($P_x = 1$), coincide con la deformada eficaz, $V(x)$, con la fuerza móvil P_x , debida a la deformación eficaz con J_A , si se trata de esfuerzo, o al movimiento eficaz con $-J_A$, en el caso de reacción.

7.5. Líneas de influencia de magnitudes estáticas. Método de las liberalizaciones

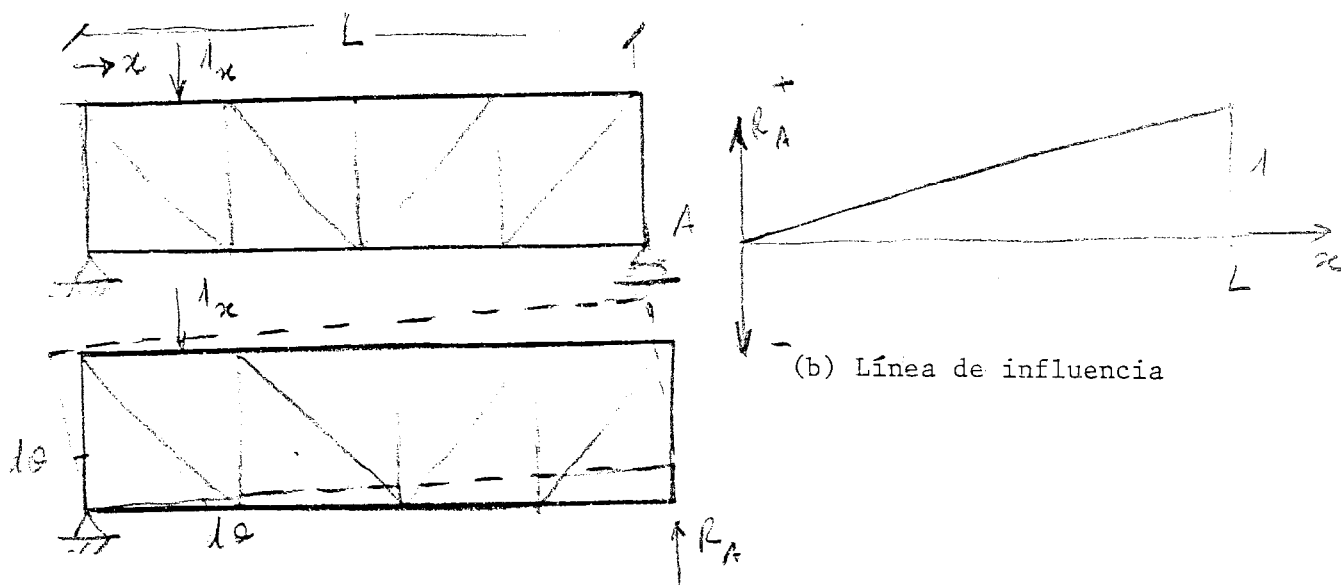
A veces, puede ser interesante realizar el cálculo de las líneas de influencia de fuerzas mediante una liberalización de la estructura, es decir, eliminando la coacción de apoyo en el caso de una reacción, o la barra en el de un esfuerzo. La estructura resultante presenta un grado de hiperestatismo en general menor que la original, y si ésta era isostática, se convierte en un mecanismo. Por lo tanto, en este último caso, no se puede utilizar el teorema de Maxwell que es sólo aplicable a estructuras, y en su lugar debe utilizarse el principio de los trabajos virtuales. A continuación se presentan algunos ejemplos que ilustran la aplicación de este método de cálculo de líneas de influencia.

Puesto que el método que se expone reduce el grado de hiperestatismo de la estructura, conviene distinguir, la situación de esta, hiperestático e isostática.

7.5.1. Estructuras isostáticas

(a) Líneas de influencia de una reacción.

Sea la estructura isostática de la figura 7.8 de la que se desea hallar la línea de influencia de la reacción en el apoyo A, cuando una carga unitaria descendente recorre el cordón superior.



(a) Aplicación de los trabajos virtuales

Figura 7.8.- Líneas de influencia de reacción.

El procedimiento a seguir consiste en liberar la estructura de la coacción correspondiente a la reacción. Resulta, en este caso un mecanismo al que se aplica el teorema de los trabajos virtuales con un estado de carga correspondiente a una posición genérica de la carga móvil

$$(-1_x) \cdot x \, d\theta + R_A \cdot L \, d\theta = 0$$

o sea

$$R_A = x/L$$

que es la línea de influencia perdida.

(b) Línea de influencia de un esfuerzo.

La idea consiste en suprimir la barra para la que se desea deducir la línea de influencia del esfuerzo, convirtiendo la estructura en un

es acercamiento, al ser tracciones los esfuerzos positivos) se obtiene:

$$\delta_{AB} = 4a \, d\theta \cos\alpha - 2ad\theta \cos\alpha + a \, d\theta \cos\alpha + h \, d\theta \sin\alpha$$

es decir

$$\delta_{AB} = 3a \, d\theta \cos\alpha + h \, d\theta \sin\alpha$$

Aplicando el teorema de los trabajos virtuales:

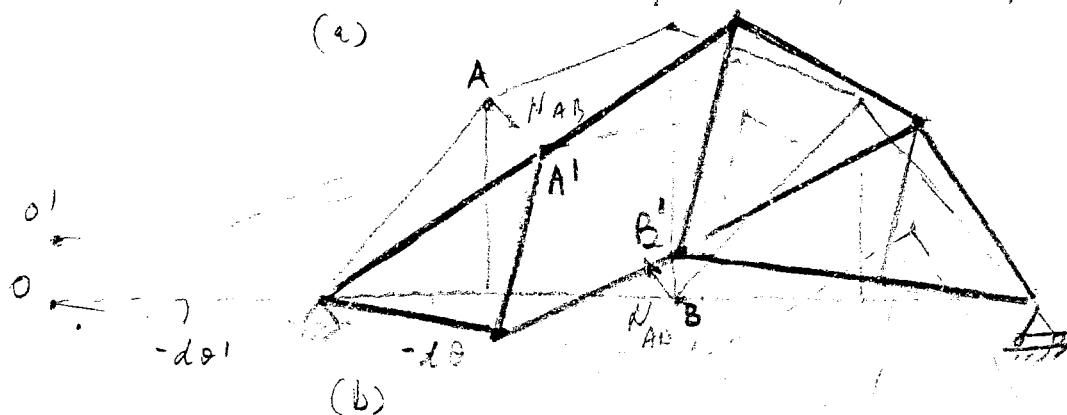
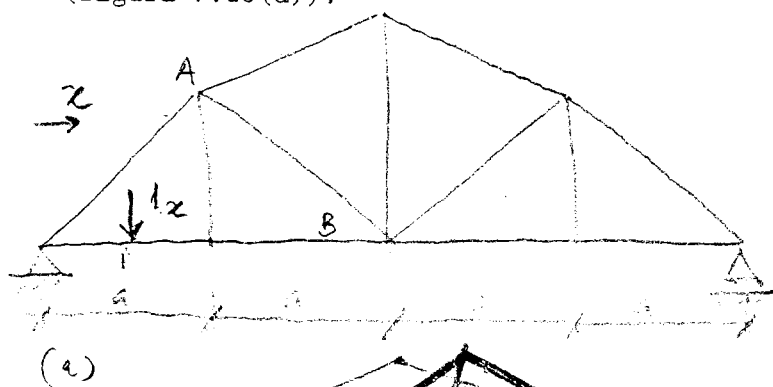
$$(-1_x) v_x + N_{AB} \cdot \delta_{AB} = 0 \quad N_{AB} = \frac{v_x}{\delta_{AB}}$$

$$\text{si } \delta_{AB} = 1 \quad d\theta = \frac{1}{3a \cos\alpha + h \sin\alpha}$$

Los puntos característicos de la línea de influencia se definen en la figura 7.9(b), ordenadas de los puntos B' y C'.

Ejemplo 7.5.

Determinar la línea de influencia del esfuerzo axil en la barra AB, cuando una carga vertical descendente de valor unidad recorre el cordón inferior (figura 7.10(a)).



Este desplazamiento se anula mediante giro alrededor de O'.

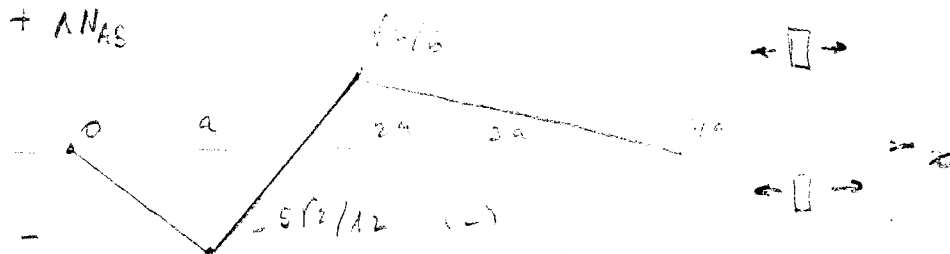


Figura 7.10. Ejemplo 7.5.

La diferencia de este ejemplo con el anterior estriba en el hecho de que el movimiento relativo entre las dos zonas de la estructura no es ya una traslación, sino un giro alrededor del punto de intersección de las barras que conectan ambas zonas (como se indica en la figura 7.10(b)).

En este caso se obtienen tras consideraciones geométricas:

$$\delta_{AB} = \frac{6}{5} \sqrt{2} a d\theta$$

La línea de influencia pedida se representa en la figura 7.10(c).

En numerosos casos, conocida la forma de la línea de influencia, mediante las consideraciones anteriores se evitan los a veces engorrosos cálculos geométricos en particular del movimiento relativo δ_{AB} , mediante la determinación directa de los valores característicos de la línea de influencia. Esta determinación directa de los esfuerzos se puede efectuar, como es conocido, en las estructuras isostáticas utilizando una técnica de las secciones. Esta forma de obtención de líneas de influencia es de práctica común.

7.5.2. Estructuras hiperestáticas

Como en el estudio de las estructuras isostáticas, se consideran a continuación algunos ejemplos correspondientes a líneas de influencia de reacciones y esfuerzos.

(a) Caso de línea de influencia de una reacción.

Hallar la línea de influencia de la reacción en A de la estructura de la figura 7.11.

En este caso, si se elimina la coacción, no resulta un mecanismo; por lo tanto, no se puede aplicar el teorema de los trabajos virtuales. Se aplica el teorema de Maxwell como se indica a continuación:

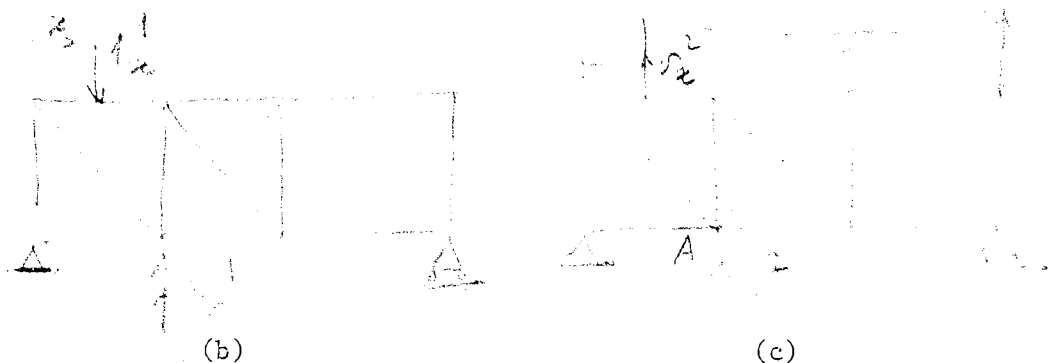


Figura 7.11.- Línea de influencia de una reacción.

$$-1_x^1 \cdot v_A^2(x) + R_A^1 \cdot v_A^2 = 1^2 \cdot 0 \quad \rightarrow \quad R_A^1 = \frac{v_A^2(x)}{v_A^2}$$

Es decir, la línea de influencia es proporcional a la deformada eficaz con 1_x del cordón que ésta recorre, en el estado 2. El factor de proporcionalidad es $1/v_A^2$. En el estado citado hay que resolver un Williot, interesando conocer los desplazamientos del cordón superior (en este caso) y el desplazamiento del punto A.

(b) Caso de línea de influencia de un esfuerzo: Eliminación de la barra.

Línea de influencia del esfuerzo en la barra A-B de la estructura de la figura 7.12(a).

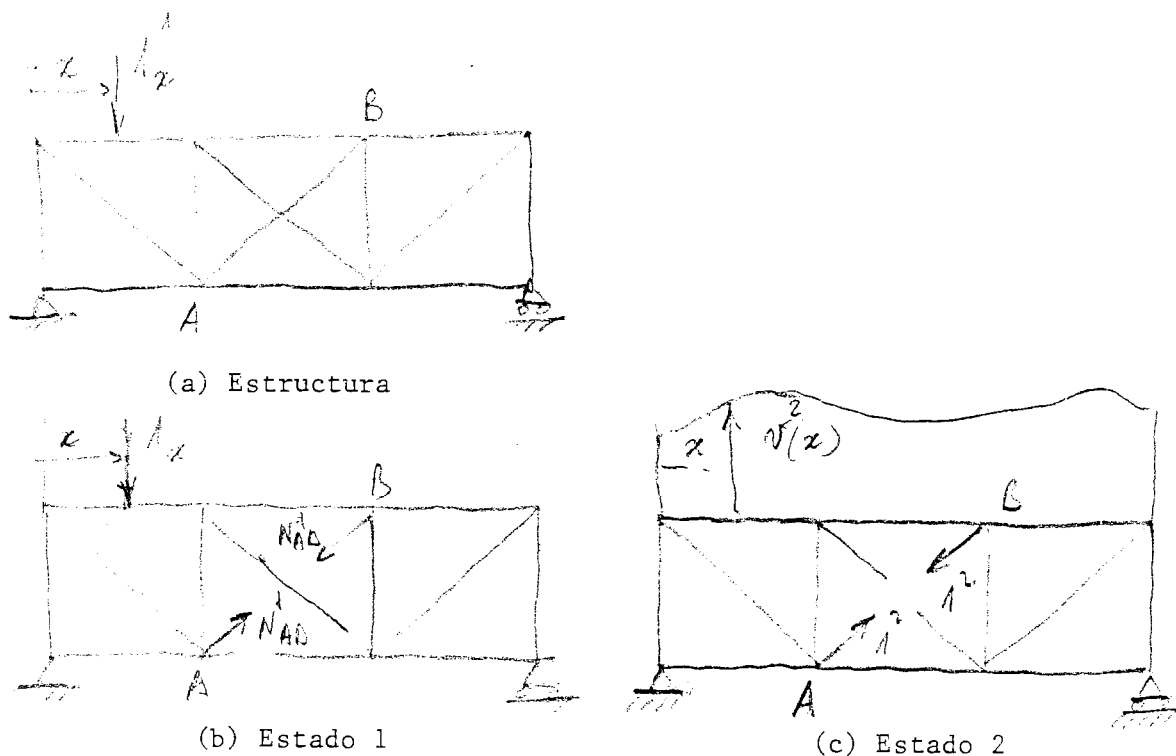


Figura 7.12.- L.i. de un esfuerzo. Eliminación de una barra.

Se aplica el teorema de Maxwell a los dos estados siguientes indicados en la figura 7.12 b y c, con lo que resulta:

$$\left(-1\right)_x^1 \cdot v^2(x) + N_{AB} \cdot \delta_{AB}^2 = 1^2 \cdot \delta_{AB}^1$$

Ahora bien, δ_{AB}^1 es lo que se acercan dichos puntos, que es igual al alargamiento, cambiado de signo, de la barra A-B, es decir:

$$\delta_{AB}^1 = -N_{AB} \left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{AB}$$

y δ_{AB}^2 es lo que se acercan A y B en dicho estado, que se determina mediante el Williot correspondiente, a la vez que se halla $v^2(x)$. Resulta entonces:

$$-v^2(x) + N_{AB} \cdot \delta_{AB}^2 = -N_{AB} \left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{AB}$$

$$N_{AB} = \frac{v^2(x)}{\left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{AB} + \delta_{AB}^2}$$

(c) Caso de líneas de influencia de un esfuerzo: Liberación de la barra.

Se estudia el mismo caso anterior de línea de influencia. El procedimiento que se indica a continuación es análogo al anterior, pero

en este caso no se elimina la barra, sino que se corta, aplicando Maxwell a los dos estados siguientes: los estados que se describen en la figura 7.13.

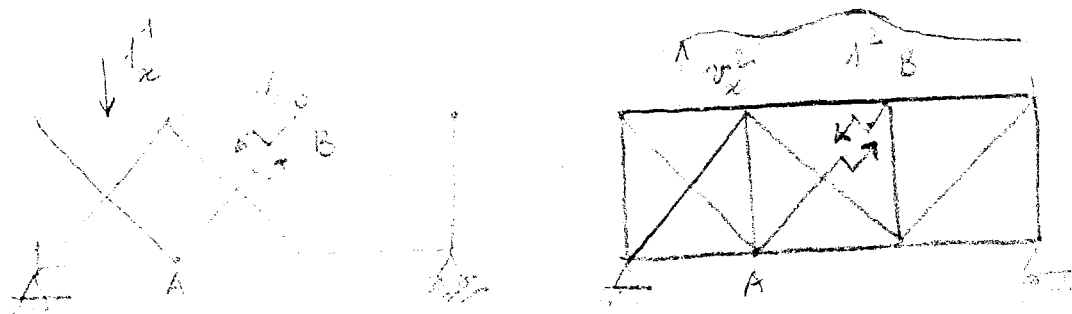


Figura 7.13.- L.l. de un esfuerzo. Liberalización.

$$(-1 \frac{1}{x}) v^2(x) + N_{AB} \cdot \delta_{A'B'}^2 = 1^2 (\delta_{A'B'}^1 = 0) = 0$$

Por lo tanto:

$$N_{AB} = \frac{v^2(x)}{\delta_{A'B'}^2}$$

$$\text{Pero } \delta_{A'B'}^2 = \delta_{AB}^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{AB}$$

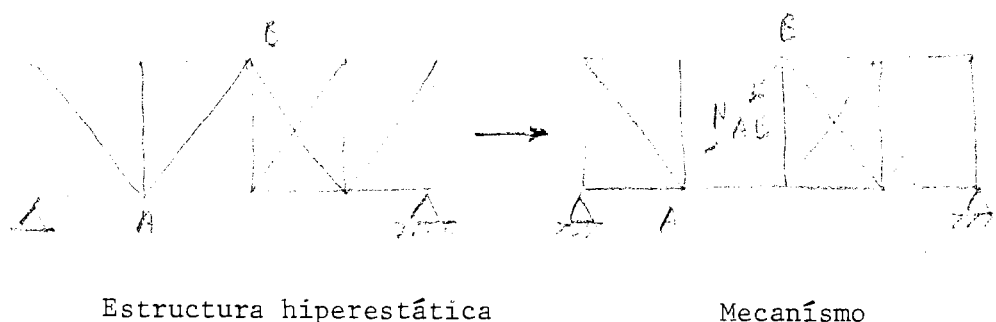
$$\text{Por lo tanto: } N_{AB} = \frac{v^2(x)}{\left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{AB} + \delta_{AB}^2}$$

que coincide con la fórmula obtenida anteriormente.

7.5.3. Casos particulares

Conviene comentar, por último, que, a veces, en el método directo, al liberalizar la estructura hiperestática, ésta no se reduce a otra estructura con un grado menos de hiperestaticidad, sino que se produce un mecanismo. En estas situaciones no se puede utilizar el teorema de Maxwell, siendo preciso, como en el caso de estructuras isostáticas, el

tratamiento de éstas mediante el principio de los trabajos virtuales. En la figura 7.14 se muestran algunos ejemplos.



(a) Línea de influencia del esfuerzo N_{AB} .



(b) Línea de influencia de la reacción R_A .

Figura 7.14.- Casos particulares de líneas de influencia.

7.6. Análisis comparativo de los métodos de determinación de líneas de influencia: Directo y Dual

El método directo de cálculo de líneas de influencia de esfuerzos presenta la ventaja de que exige el análisis de una estructura más simple, es decir, menos hiperestática, que el método dual. Sin embargo, es menos sistemático, ya que su desarrollo precisa, bien la utilización del teorema de Maxwell, bien el principio de los trabajos virtuales, dependiendo del tipo de estructura, y a veces, incluso para la misma estructura, del esfuerzo o reacción cuya línea de influencia se intenta obtener. Esta desventaja es importante, particularmente (como se verá

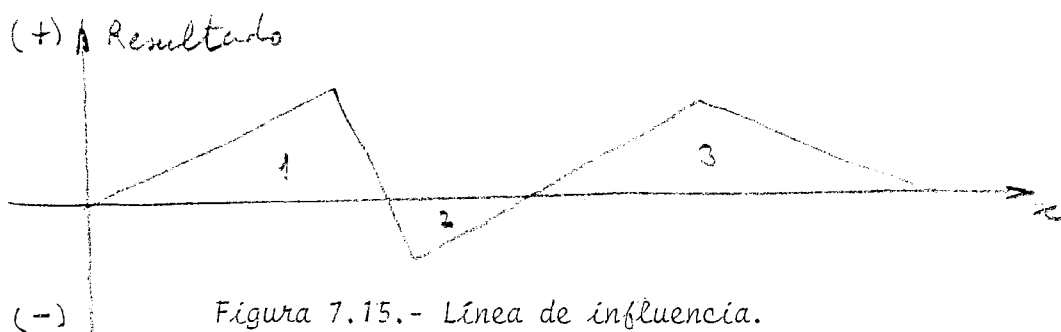
más adelante en el curso), si se deducen, mediante un programa de cálculo por computador, distintas líneas de influencia en una misma estructura, puesto que el método directo analiza para cada línea de influencia una estructura distinta. Por el contrario, en el método dual, es la misma estructura (que coincide con la original) la que se calcula simplemente para distintas hipótesis de carga (descenso de apoyos, alargamiento de barras, etc.). Esto representa una drástica reducción del esfuerzo de cálculo y una simplificación notable en la entrada de datos, ya que es preciso definir solamente una estructura.

7.7. Esfuerzos máximos producidos por un tren de cargas

A continuación se exponen dos ejemplos característicos.

7.7.1. Sobrecarga uniforme indefinida

Supuesto que se desea conocer el valor máximo de un resultado en una cierta barra o nudo debido a la actuación -o no actuación- de una sobrecarga conocida, se determina, en primer lugar, la línea de influencia del resultado (figura 7.15).



Si la sobrecarga es uniforme, de intensidad $p(\text{t.m}^{-1})$, el máximo resultado positivo se deduce cargando las zonas 1 y 3 y su valor será:

$$R_{\text{máx}}^+ = \{\Omega_1 + \Omega_3\}p$$

y el máximo negativo se obtiene cargando la zona 2:

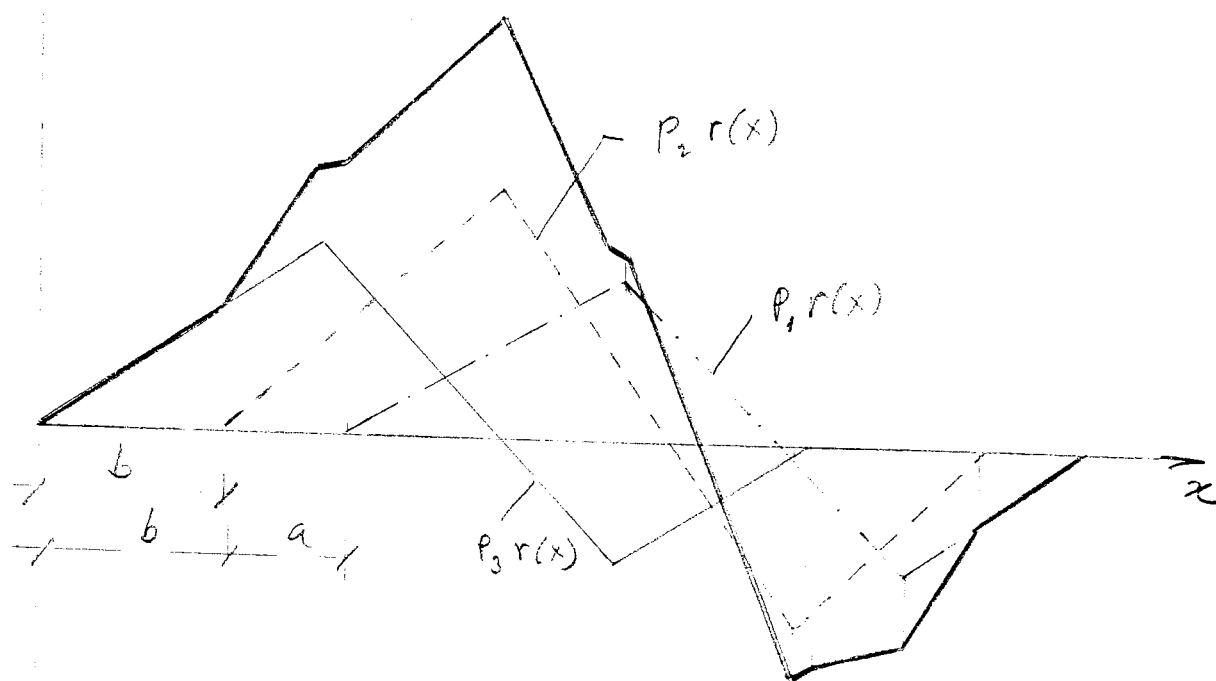
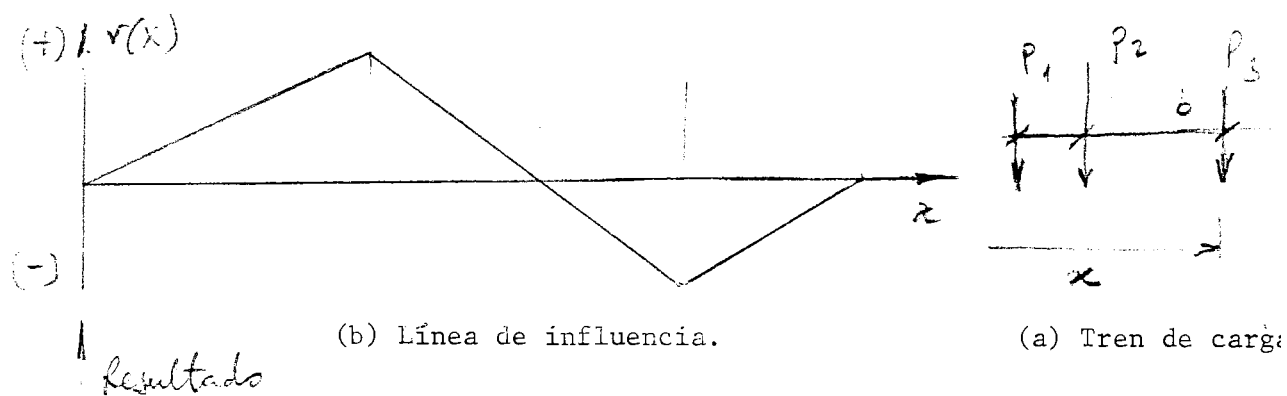
$$R_{\text{máx}}^- = \Omega_2 \cdot p$$

en donde Ω_i representa el área del triángulo i , en la línea de influencia ($i = 1, 2, 3$).

7.7.2. Tren de cargas

Sea el tren de cargas de la figura 7.16a, y se desea hallar el máximo (o mínimo) resultado, debido a la actuación del citado tren, en una cierta barra, nudo o sección de una estructura.

Se determina la línea de influencia que se supone corresponde a la figura 7.16b.



(c) Línea de influencia del tren.

Figura 7.16.- Línea de influencia de un tren de cargas.

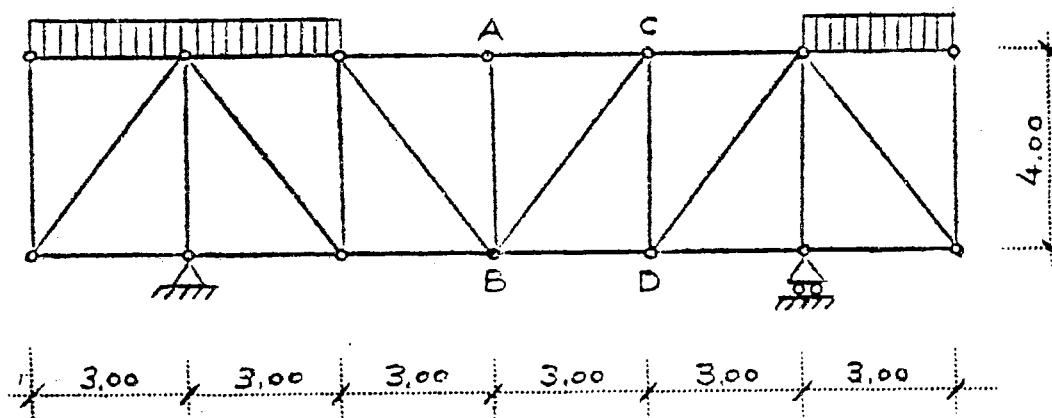
Para hallar el efecto del tren de cargas se multiplica dicha línea de influencia $r(x)$ por P_1 , P_2 y P_3 . El efecto total se consigue sumando las tres líneas anteriores, pero desplazando la correspondiente a P_2 una cantidad b hacia la derecha, y, la correspondiente a P_1 , una cantidad $(a+b)$.

A veces, es más práctico dibujar el tren en un papel transparente, en escala con el eje de abscisas x , de la línea de influencia y tantear unas pocas posiciones alrededor de la situación que se supone más desfavorable.

Este cálculo es directo, ya que las ordenadas se miden directamente en el papel transparente.

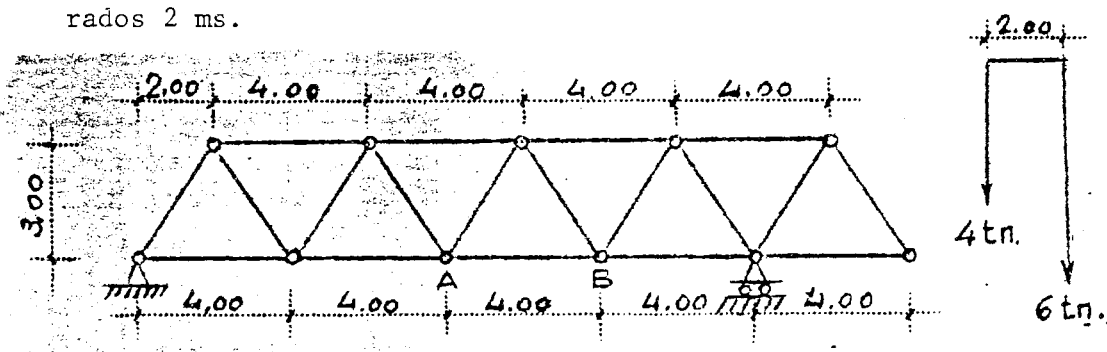
EJERCICIOS. ENUNCIADOS

- 7.1. Obtener los máximos esfuerzos en valor absoluto en AB, BC y CD, para carga uniforme móvil de valor 1 t/m .



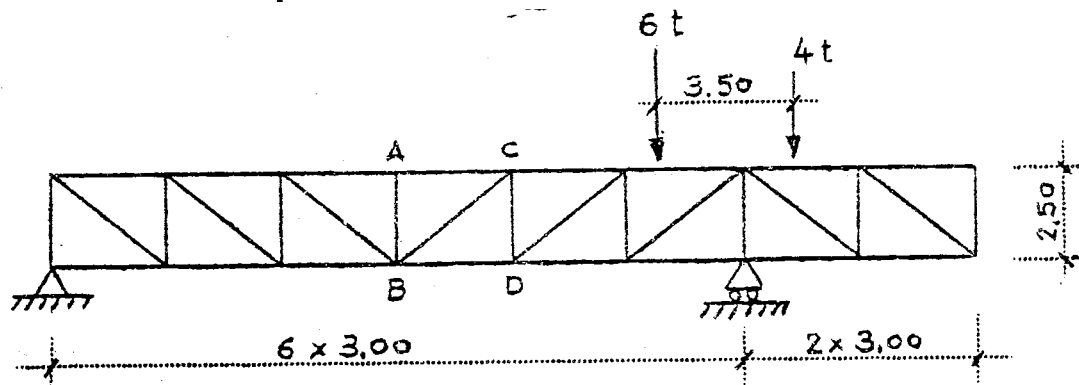
La carga vertical puede actuar en cualquier posición, llenando total o parcialmente los vanos del cordón superior.

- 7.2. Por el cordón inferior de la viga triangulada metálica dibujada, circula un carrito de dos ejes, uno de 6 tm y otro de 4 tm separados 2 ms.



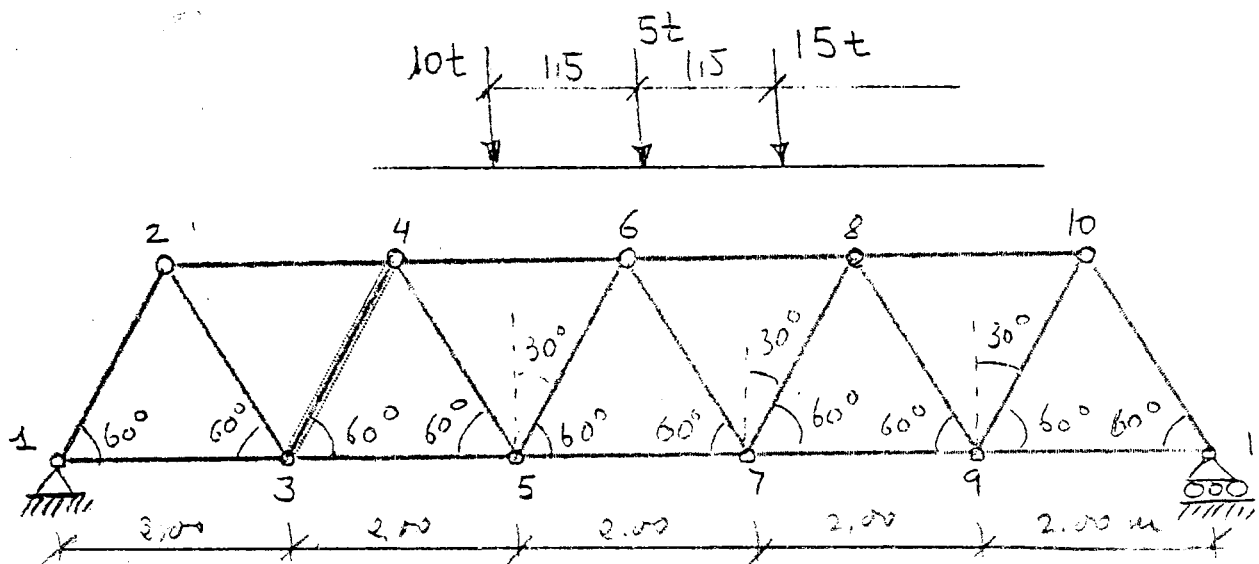
Se pide dimensionar exclusivamente para esfuerzos axiales (es decir, obtener el área necesaria en cm^2) el cordón AB sabiendo que cuando trabaja a tracción la tensión admisible es de 1.200 Kg/cm^2 y cuando trabaja a compresión de 800 Kg/cm^2 .

- 7.3. 1) Obtener las líneas de influencia de los esfuerzos axiales en las barras AB, BC, AC y BD para una carga vertical moviéndose sobre el cordón superior.



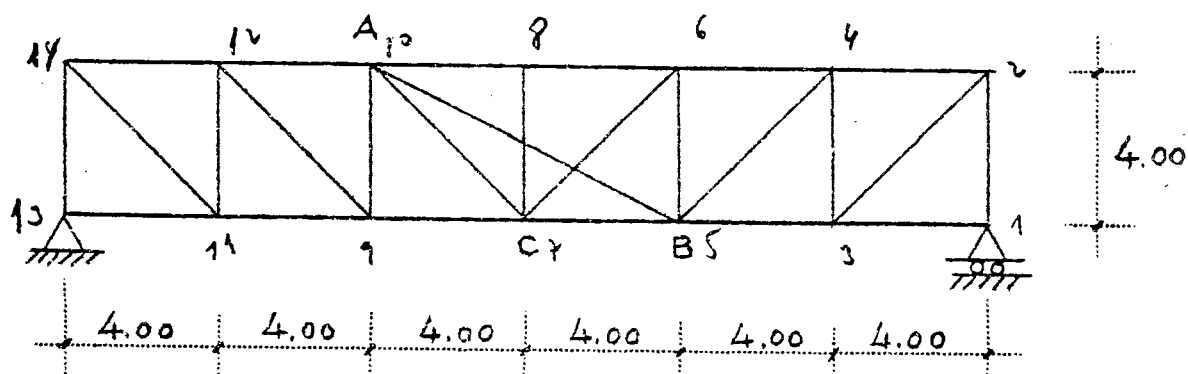
- 2) Obtener el máximo esfuerzo en la barra BC bajo la acción del tren de cargas indicado.

- 7.4. Sobre el cordón superior de la estructura adjunta circula un tren de cargas que se define en el croquis.

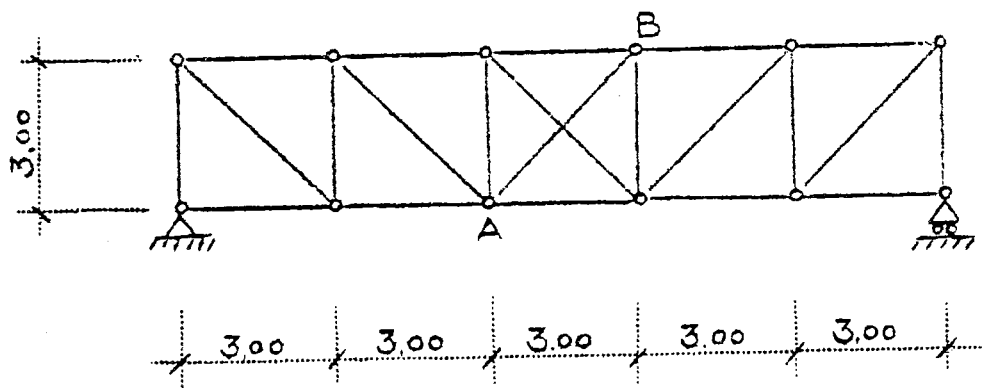


Obtener los esfuerzos máximos de tracción y compresión en la barra diagonal 3-4.

- 7.5. Obtener la línea de influencia del esfuerzo en la barra AB para una carga que se mueve por el cordón inferior. Todas las barras tienen constante la relación $L/E\Omega$.

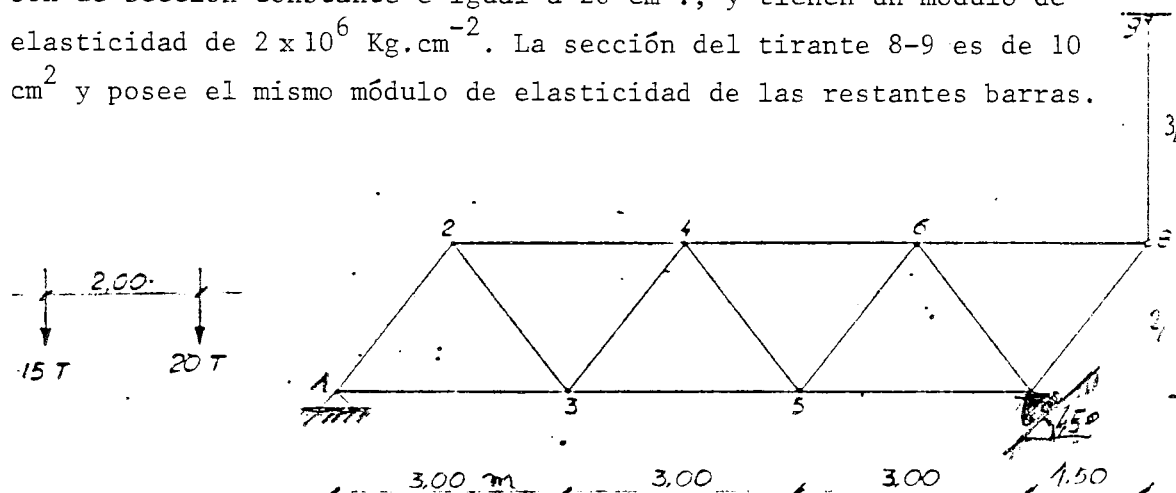


- 7.6. Obtener la línea de influencia de la barra AB en la siguiente estructura.



La característica $L/E\Omega$ es constante en todas las barras.

- 7.7. En la estructura indicada, todas las barras, excepto el tirante 8-9, son de sección constante e igual a 20 cm^2 , y tienen un módulo de elasticidad de $2 \times 10^6 \text{ Kg.cm}^{-2}$. La sección del tirante 8-9 es de 10 cm^2 y posee el mismo módulo de elasticidad de las restantes barras.



Hallar los esfuerzos axiales máximos en la barra 4-5 cuando el vehículo indicado recorre el cordón superior.

- 7.8. En la estructura articulada adjunta, que se une mediante sendas articulaciones fijas a dos ménsulas de hormigón (1-2 y 7-8) empotradas en sus bases, se pide: Línea de influencia del movimiento relativo entre los nudos 2 y 6 medidos según la dirección de la recta 2-6, cuando actúa una carga vertical de 1 t en el cordón superior.

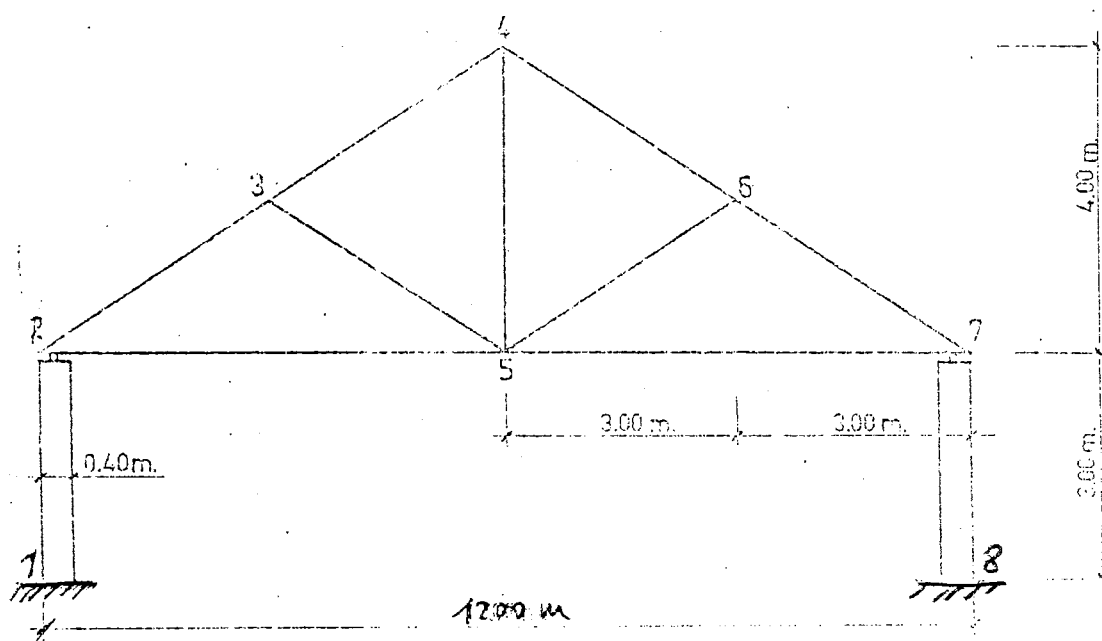
Se despreciará la enlongabilidad de las barras 1-2 y 7-8.

Características de las barras:

1-2 y 7-8: $0,40 \times 0,30$ m. $E = 2 \times 10^6$ T/m².

Restantes barras $\Omega = 3,0$ cm². $E = 2 \times 10^7$ T/m².

Se adoptará como sentido positivo en la línea de influencia el acercamiento entre los puntos 2 y 6. En la línea de influencia se darán los valores característicos de la misma.



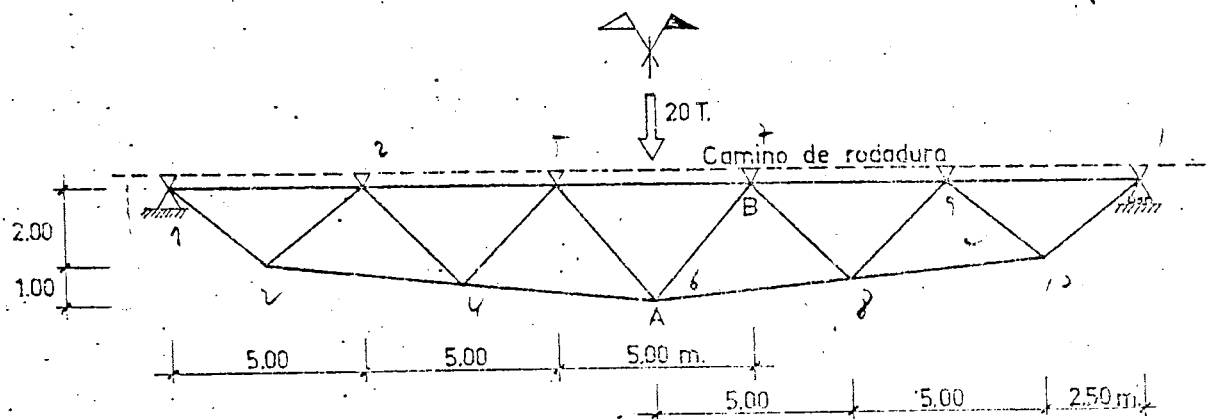
7.9. La viga de celosía indicada en la figura sirve de soporte al camino de rodadura de un puente grúa, en la forma que dicha figura muestra.

Al proceder a su montaje la diagonal AB resultó ser dos cm más corta de lo necesario.

Se desea saber cuál tendría que ser la sección mínima de las barras (supuestas todas iguales) para que, a pesar de ese defecto, la pendiente máxima del carril de rodadura no supere el 8 por mil para el caso más desfavorable de carga que puede suponerse formado por una carga puntual única de 20 T, en el centro de la luz.

No se considerarán las deformaciones de flexión del carril entre puntos de apoyo del mismo.

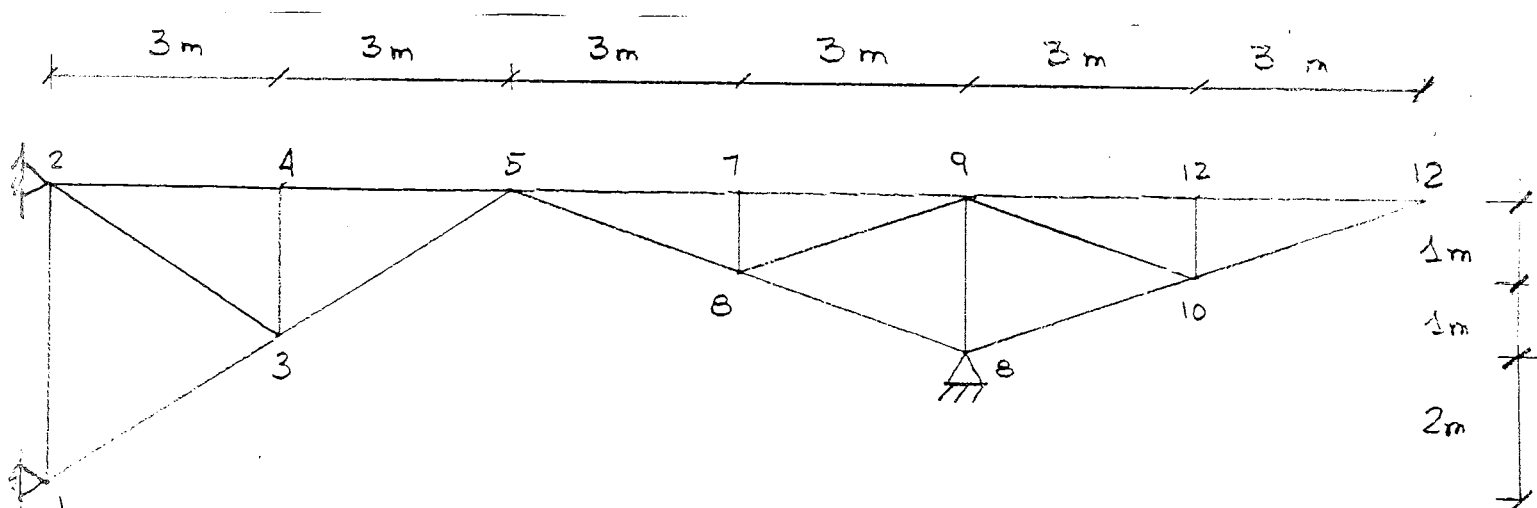
$$E = 2.100.000 \text{ Kg/cm}^2.$$



7.10. En la estructura de la figura, se supone que una carga vertical móvil de 1 tonelada dirigida hacia abajo, recorre el cordón superior 2-5-12. SE PIDE:

1. Clasificar la estructura.
2. Línea de influencia del axil en la barra 8-10.
3. Línea de influencia del axil en la barra 6-8.

Características de todas las barras $L/E\Omega = 10^{-5} \text{ m/T}$.



- 7.11. En el puente celosía de la figura 1 se observa que los esfuerzos máximos en la barra 3-5 son excesivos. Con objeto de reducirlos se dispone el refuerzo que se muestra en la figura 2, mediante la inclusión de las barras 2-4 y 4-6.

Para la actuación de una sobrecarga uniforme de 1 t/m se admite que puede actuar en cualquier zona del tramo 1-2-5-6-8.

SE PIDE: Determinar la diferencia en toneladas en los esfuerzos máximo y mínimo en la barra 3-5 que supone la inclusión del refuerzo indicado.

DATOS: -Sección de todas las barras: 6 cm^2 .

-Módulo de elasticidad del material: $2.000.000 \text{ Kg/cm}^2$.

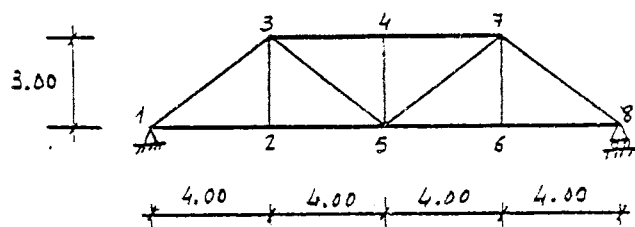


Figura 1

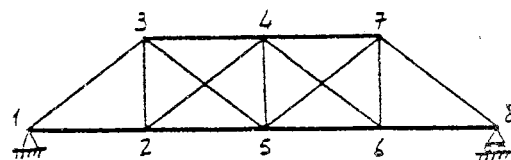


Figura 2

EJERCICIOS. SOLUCIONES

7.1. $N_{AB} = -3,0t$ (compresión).
 $N_{BC} = 2,97t$ (tracción).
 $N_{CD} = -4,88t$ (compresión).

7.2. Tracción $6 + 4 \times \frac{3}{4} = 9$

$$4 + 6 \times \frac{11}{12} = \frac{19}{2} > 9$$

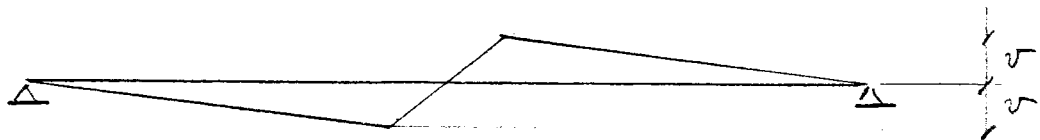
$$\Omega = \frac{19}{2} / 1.2 = 7.9 \text{ cm}^2.$$

Compresión $6 \times \frac{5}{6} + 4 \times \frac{5}{12} = \frac{20}{3}$

$$\Omega = \frac{20}{3} / 0.8 = 8.3 \text{ cm}^2.$$

7.5. Nudo	14	12	10	8	6	4	2
N	0	0,158	0,316	-0,203	-0,316	-0,158	0

7.6. La línea de influencia es:



con $v = 0,28 t$.

7.7. Línea de influencia.

Nudo	2	4	6	8
N_{4-5}	-0,25	-0,67	0,27	-0,08

Los valores extremos se producen:

$N_{45 \text{ min}} = -19,25t$ con la carga de 20 t en 4.
 $N_{45 \text{ max}} = 4,78t$ con la carga de 15 t en 6.

7.8. Línea de influencia.

Nudo	2	3	4	6	7	
δ_{2-6}	0	0.085	0.290	0.770	0	mm.

7.9. La pendiente máxima se produce en las barras extremas 1-3 ó 9-11.

Se estudian los dos estados de carga: (1) N_i^0 son los esfuerzos producidos por dos cargas verticales de 10t en los nudos 5 y 7. (2) N_i^1 son los esfuerzos producidos por una carga vertical unitaria (10t) aplicada en 9.

Se obtiene según el cuadro:

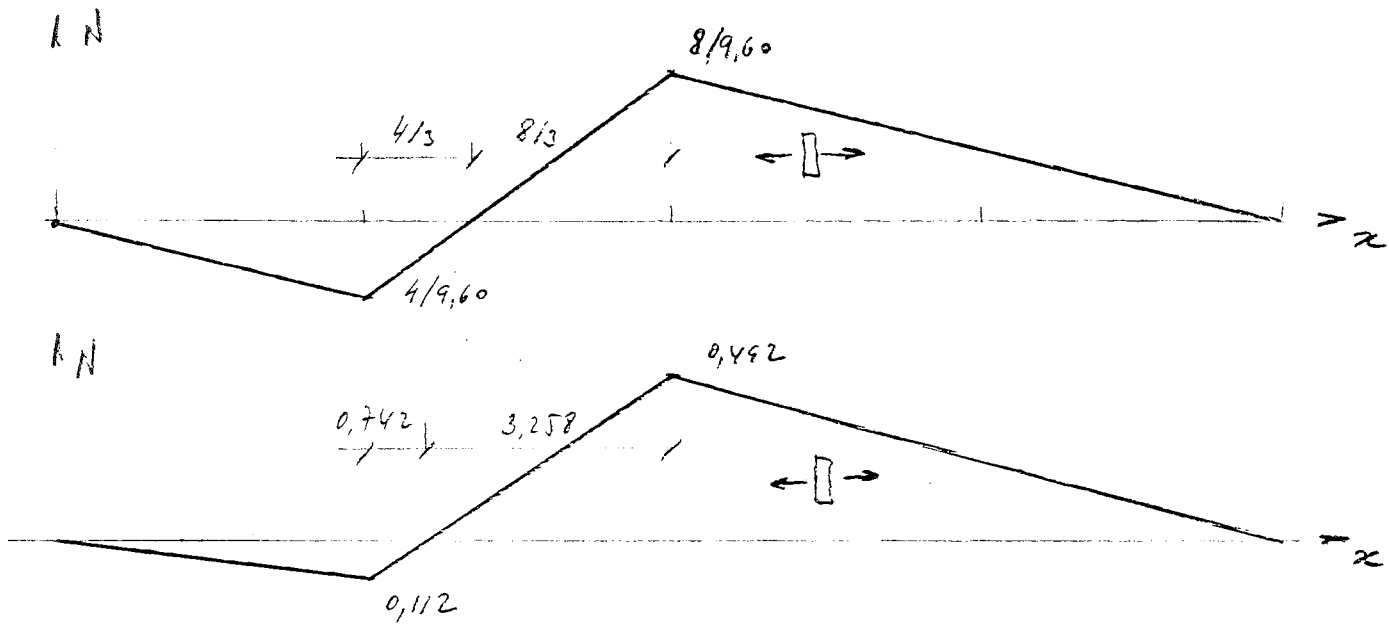
$$\frac{11712}{E\Omega} + 0,41 \times 0,02 = \delta \leq 0.008 \times 5 = 0.04$$

con lo que resulta el área mínima: $\Omega > 18,0 \text{ cm}^2$.

BARRA	L	N^0	$N^0 L$	N^1	$N^0 L N^1$
1-2	3,2	15,6	49,92	3,2	159,74
1-3	5,0	-12,0	-60,00	-2,5	150,00
2-3	3,3	-12,5	-41,25	-2,5	103,13
2-4	5,0	21,5	107,50	4,4	473,00
3-4	3,6	11,0	39,60	2,4	95,04
3-5	5,0	-29,2	-146,00	-6,0	876,00
4-5	3,6	-9,0	-32,4	-1,8	58,32
4-6	5,0	35,5	177,50	7,2	1278,00
5-6	4,0	-5,0	-20,00	1,7	-34,00
5-7	5,0	-32,4	-162,00	-8,2	1328,40
6-7	4,0	-5,0	-20,00	-4,1	82,00
6-8	5,0	35,5	177,50	10,8	1917,00
7-8	4,0	-9,0	-32,40	4,5	-145,80
7-9	5,0	-29,2	-146,00	-13,9	2029,40
8-9	3,6	11,0	39,60	-5,5	-217,80
8-10	5,0	21,5	107,50	17,8	1913,50
9-10	3,3	-12,5	-41,25	-10,0	412,50
9-11	5,0	-12,0	-60,00	-10,0	600,00
10-11	3,2	15,6	49,92	12,7	633,98

11712,01

7.11. Resulta de las líneas de influencia representadas en la figura:



$$\begin{aligned} N_{\min} &= -1,11t \\ N_{\max} &= 4,45t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{\min} &= 2,68t \\ N_{\max} &= 0,27t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta C &= -0,846t \\ \Delta T &= -1,776t \end{aligned}$$